

钱学森

目 录

第一讲 表面波

第二讲

基本方程式

我們要研究无粘性液体在外压的短时间作用下的结果：

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

X = 单位质量体积力

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

如果压力作用的时间为 τ，而在 $t=0$ 的时候 $v_x = v_y = v_z = 0$，

$$v_x + \int_0^\tau \left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)dt = \int_0^\tau X\,dt - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\tau p\,dt$$

但 $\tau \ll 1$，

$$v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\tau p\,dt$$

让

$$\pi = \int_0^\tau p\,dt = \pi(x,y,z) = \text{冲量}$$

$$v_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi}{\rho}\right),\quad v_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi}{\rho}\right),\quad v_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\pi}{\rho}\right)$$

所以由于压力所产生的运动是无旋的，而且如果让

$$\pi = -\rho\varphi_0,$$

那么在压力作用停了的瞬间，液体速度是

$$v_x = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x},\quad v_y = \frac{\partial\varphi_0}{\partial y},\quad v_z = \frac{\partial\varphi_0}{\partial z},\quad \vec{v} = \text{grad}\,\varphi_0,$$

φ_0 = 在 $t=0$ 的速度势

因此以后的运动也是无旋的，φ = 速度势.

$$\vec{v} = \text{grad}\,\varphi$$

因而由于液体的连续条件

$$\mathrm{div}\,\vec{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

就有

$$\boxed{\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0}$$

—— 基本微分方程式

我們知道，在无旋的运动中，

$$\frac{p}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}v^2-V+F(t)$$

其中 V 是外力势。如果 $0z$ 的方向是竖直向上的，那末

$$V=gz$$

而

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=0,\qquad -\frac{\partial V}{\partial y}=0,\qquad -\frac{\partial V}{\partial z}=-g$$

其实在我們的许多讨论里，我们的目的是分析小干扰情况，所以 $\frac{1}{2}v^2$ 可以略去不计，而且 $F(t)$ 也可以吸收到 φ 中去，所以

$$\boxed{\frac{p}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz}$$

—— 压力关系

现在我们来研究一下边界条件：在不动面上

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0}$$

—— 在不动面上 —— 边界条件

我们取平衡位置时候的自由面为 $0xy$ 平面，在液体自由面上的压力是常数 p_0，因而在自由面上

$$\frac{p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz$$

为了简单起见，我们将以 $\varphi+\frac{p_0}{\rho}t$ 来代替 φ，那么压力关系成为

$$\boxed{\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz}\ .$$

如果在任意时间 t，自由面的方程是

$$z=\zeta(x,y,t)$$

那么因为在自由面上 $p=p_0$，所以压力关系

$$\left[\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial t}\right]_{z=\zeta(x,y,t)}+g\zeta=0$$

但是
$$\left[\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial t}\right]_{z=\zeta(x,y,t)}=\frac{\partial\varphi(x,y,0,t)}{\partial t}+\zeta\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t\partial z}+\cdots$$

所以如果略去二次微项不计，那么

$$\frac{\partial\varphi(x,y,0,t)}{\partial t}+g\zeta=0$$

或用微分

$$\boxed{\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t^2}}$$

我们来研究一下，$\frac{\partial\zeta}{\partial t}$到底是什么？我们研究在自由面上一点 $x,y,z=\zeta(x,y,t)$ 的速度，

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{dy}{dt}\cong\frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

如果我们研究的是小干扰，$\frac{\partial\zeta}{\partial x}$，$\frac{\partial\zeta}{\partial y}\ll 1$，因而 $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ 就是 $v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$，所以终于

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}}\qquad z=0$$

边界条件

象这样一个不定常运动，我们除了边界条件而外，还需要初始条件：我们从现象的情况来看，初始条件将在自由面上规定：

令
$$\boxed{\zeta(x,y,0)=h(x,y)=-\frac{1}{g}f(x,y),}$$

那么
$$\boxed{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{z=0,\,t=0}=f(x,y)}$$

速度将由作用在自由面上的激起动冲量得来。我们在以前（只常有差别的差别，但这里 $t=0$，故无差别）$\varphi_0=-p\pi$，所以

5　　3

$$\varphi_0(x,y,0) = -\frac{1}{\rho}\pi(x,y,0) = F(x,y)$$

那么

$$\boxed{\varphi = F(x,y), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(x,y)} \quad z=0,\ t=0$$

这是初始条件。

惟一性问题。如果 φ_1, φ_2 是满足一切条件的两个不同解，$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 也将是一个解，但在 $z=0$, $t=0$

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

所以从物理的情况来看，没有干扰、没有运动，所以 $\varphi \equiv 0$，也就是 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$。

但是在很多情况下，我们要研究的是某个一定频率 σ 的自由谐和振动，也就是

$$\varphi(x,y,z,t) = \cos(\sigma t + \varepsilon)\,\Phi(x,y,z)$$

那么

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \quad \text{在不动面上} \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g}\Phi, \quad \text{在自由面 } z=0 \text{ 上} \end{aligned}}$$

自然，二类问题，初始问题和自由谐和振动问题是可以由叠加法而互相转变。

平面波

如果我们认为一切都不是 y 的函数，那么

$$\varphi(x,z,t) = \cos(\sigma t + \varepsilon)\,\Phi(x,z)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

4

其边界条件为 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0$ 在不动面

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\sigma^2}{g}\Phi \quad 在\ z=0.$$

在深水中的

驻波 令 $\Phi(x,z)=P(z)\sin k(x-\xi)$，其中 k,ξ 是两个常数。

所以微分方程式 $P''(z)-k^2P(z)=0$

$$P(z)=C_1e^{kz}+C_2e^{-kz}$$

由于不能让干扰在深水里越来越大，所以 $C_2=0$. 因而我们得以

$$\Phi(x,z)=Ce^{kz}\sin k(x-\xi)$$

而 $\varphi(x,z,t)=Ce^{kz}\sin k(x-\xi)\cos(\sigma t+\epsilon)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=kCe^{kz}\sin k(x-\xi)$$

故自由面上，$z=0$

$$kC\sin k(x-\xi)=\frac{\sigma^2}{g}C\sin k(x-\xi)$$

因而如果要在无论什么点上，上式都对，那么

$$\boxed{\sigma^2=kg}$$

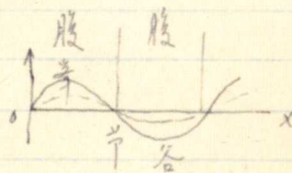
为了找自由面的形状，我们用 $\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,0,t)}{\partial t}$

也就是

$$\zeta=\frac{C\sigma}{g}\sin k(x-\xi)\sin(\sigma t+\epsilon)$$

如果 $\frac{C\sigma}{g}=a$，$\xi=\epsilon=0$，

$$\zeta=a\sin kx\sin\sigma t$$



而令在 t 时间

$$a\sin\sigma t=A$$

$$\zeta=A\sin kx$$

所以波幅是 $a\sin\sigma t$，波长是

$$\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{k}} \qquad \boxed{\lambda=\frac{g\tau^2}{2\pi}}$$

而频率是

$$\boxed{1/\tau=\frac{\sigma}{2\pi}} \qquad \frac{1}{\tau^2}=\frac{\sigma^2}{(2\pi)^2}, \qquad \sigma^2=\frac{(2\pi)^2}{\tau^2}=\frac{2\pi}{\lambda}g$$

$$\boxed{\tau^2=\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

5

由此可见波长和频率或周期是有一定关系的。但与液体的密度或 p_0 无关。与 g 有关！

现在我们来研究液体质点的速度和轨迹：

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma} e^{kz} \cos kx \cos \sigma t ; \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{agk}{\sigma} e^{kz} \sin kx \cos \sigma t$$

但是 $gk = \sigma^2$,

$$v_x = a\sigma e^{kz} \cos kx \cos \sigma t$$
$$v_z = a\sigma e^{kz} \sin kx \cos \sigma t$$

所以质点轨迹，

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z},$$

或

$$\frac{\sin kx}{\cos kx} dx = dz, \qquad \ln(\cos kx) + kz = 常數 \quad (\cos kx > 0)$$

$\cos kx < 0, \quad \cos kx = e^{i\pi} |\cos kx|$

$\ln|\cos kx| + i\pi + kz = 常數$

所以

$$\boxed{\ln|\cos kx| + kz = C}$$

我们也可以用流函數的办法来求：

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -a\sigma e^{kz} \sin kx \cos \sigma t ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = a\sigma e^{kz} \cos kx \cos \sigma t$$

$$\therefore \ d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz = a\sigma \cos \sigma t \left[-e^{kz} \sin kx \, dx + e^{kz} \cos kx \, dz \right]$$

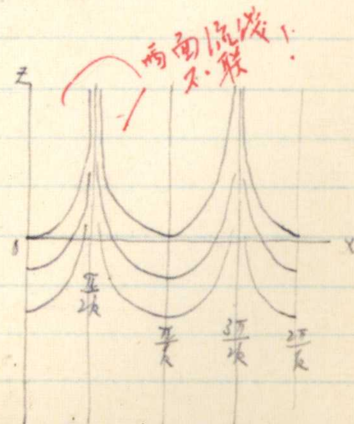
$$= \frac{a\sigma \cos \sigma t}{k} d\left[e^{kz} \cos kx \right]$$

因而

$$\boxed{\psi = \frac{a\sigma \cos \sigma t}{k} e^{kz} \cos kx}$$

而任意一条流线的方程是

$$\boxed{e^{kz} \cos kx = C'.}$$



因此流线是可以在 z-向移动的。而且它们也不

这一方法有缺点，不能肯定时间常數。

6

因时间而变动；所以它们是流体质点移动的轨迹。但质点不过沿着流线振动，而且振幅小，可以把它们看作是直线运动。如果 x_0, z_0 是一个质点的平衡位置，那么以小干扰的看法

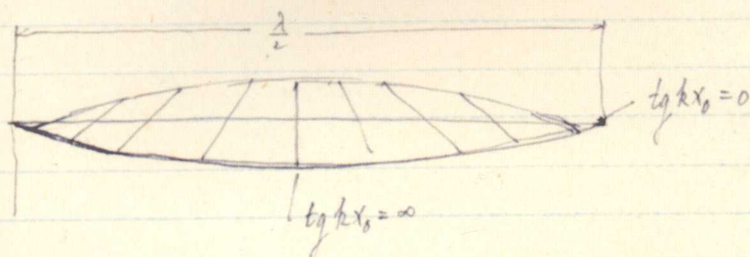
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \cos kx_0 \cos \sigma t, \qquad \frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \sin kx_0 \cos \sigma t$$

$$x - x_0 = a e^{kz_0} \cos kx_0 \sin \sigma t, \qquad z - z_0 = a e^{kz_0} \sin kx_0 \sin \sigma t$$

故

$$\boxed{\frac{z - z_0}{x - x_0} = \operatorname{tg} kx_0}$$



$$e^{2\pi} = 535$$

<u>进行波</u>　我们可以选择 $\zeta = \frac{\pi}{2k}$，$\epsilon = \frac{\pi}{2}$，

$$\varphi = Ce^{kz} \sin\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\sigma t + \frac{\pi}{2}\right) = Ce^{kz} \cos kx \sin \sigma t$$

这个驻波和以前的 $\qquad \varphi = Ce^{kz} \sin kx \cos \sigma t$

比较，无论 x 或 t 都差 $\frac{\pi}{2}$，如把它们两者叠加一起当然仍然是一个解

$$\varphi = Ce^{kz}\{\cos kx \sin \sigma t + \sin kx \cos \sigma t\} = Ce^{kz} \sin(kx + \sigma t)$$

我们来研究它的自由面

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t} = -\frac{C\sigma}{g} \cos(kx + \sigma t)$$

就象以前一样，引入记号 $\frac{C\sigma}{g} = a$，

$$\zeta = -a \cos(kx + \sigma t), \qquad \varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin(kx + \sigma t)$$

现在波幅不以时间而变了，而波长 λ 仍然是

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

7

而任何 x, t 平面的点，如果满足 $kx+\sigma t=$ 常数，ζ 即不变。波速是

$$\boxed{c=\frac{\sigma}{k}} \quad 因为 \quad \sigma^2=kg,$$

故

$$c^2=\frac{\sigma^2}{k^2}=\frac{g}{k}, \qquad c=\sqrt{\frac{g}{k}}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}=\frac{\lambda}{\tau}=\frac{\sigma\lambda}{2\pi}$$

所以波速因波长的不同而有所不同，是波长的平方根。

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=a\sigma e^{kz}\cos(kx+\sigma t)$$

$$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=a\sigma e^{kz}\sin(kx+\sigma t)$$

流线在任何一瞬间 t 是

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dz}{v_z}, \qquad \frac{v_z}{v_x}dx=dz, \qquad \frac{\sin(kx+\sigma t)}{\cos(kx+\sigma t)}dx=dz$$

积分得

$$e^{kz}\cos(kx+\sigma t)=常数。$$

瞬间的流线形状是与驻波相同的，不过现在流线是处随时间而变，因而它并不代表质点运动的轨迹！要求质点运动的轨迹，还是

$$\frac{dx}{dt}=a\sigma e^{kz_0}\cos(kx_0+\sigma t)$$

$$\frac{dz}{dt}=a\sigma e^{kz_0}\sin(kx_0+\sigma t)$$

$$(x-x_0)=a\,e^{kz_0}\sin(kx_0+\sigma t)$$

$$-(z-z_0)=a\,e^{kz_0}\cos(kx_0+\sigma t)$$

所以

$$(x-x_0)^2+(z-z_0)^2=a^2e^{2kz_0}.$$

也就是说质点运动的轨迹是以 x_0, z_0 为中心的圆，其半径为 ae^{kz_0}，以深度的增加而急剧减小。又

$$(x-x_0)+i(z-z_0)=ae^{kz_0}\left[\sin(kx_0+\sigma t)-i\cos(kx_0+\sigma t)\right]$$

$$=ae^{kz_0}\left[-i^2\sin(kx_0+\sigma t)-i\cos(kx_0+\sigma t)\right]$$

$$=-iae^{kz_0}\cdot e^{i(kx_0+\sigma t)}=-iae^{k(z_0+ix_0)}e^{i\sigma t}$$

8

因此质点在小圆上的转动是反时针方向的，而其角速度是σ。因为

$$\zeta = -a\cos(kx+\sigma t)$$

所以波峰是在 $kx+\sigma t=(2n+1)\pi$，所以在波峰的地方

$$\frac{dx}{dt}=-a\sigma, \quad \frac{dz}{dt}=0. \quad \text{以波的方向运动}$$

在波谷的地方，$kx+\sigma t=2n\pi$， $\frac{dx}{dt}=a\sigma$， $\frac{dz}{dt}=0$，以波的反方向运动。

我们再来计算一下压力，

$$\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz=-age^{kz}\cos(kx+\sigma t)-gz$$

因为 $z-z_0$，$x-x_0$ 都是一级小量，而 $z-z_0=-ae^{kz_0}\cos(kx_0+\sigma t)$，所以

$$\frac{p-p_0}{\rho}=-age^{kz_0}\cos(kx_0+\sigma t)-g(z-z_0)-gz_0=-gz_0$$

这表示说，在运动时，在那些平衡时处于同一水平面z_0的质点所组成的曲面上的压力总是一个常数，且和平衡时值相同。自由面的质点与其他质点的差别只在$z_0=0$。从这里可见，由$z=z_0$所组成的面都可以作为液体的自由面。

反向运动的波 $\varphi=\frac{ag}{\sigma}e^{kz}\sin(kx-\sigma t)$

一切反向运动。

波长λ，米	50	100	5000	500,000
波速c，米/秒	8.83	12.50	88.3	883
周期T，秒	5.60	8.00	56.0	560

第二讲 表面波

另一研究行波的方法：

我们也可以用另一种方法来研究进行波：让液体以c的速度在空间流动，而波面形状不变，速度分布也将不随时间而变，成为一个定常运动。在自由面上压力为p_0。

$$w=\varphi+i\psi=f(x+iz)=-c(x+iz)+i\alpha ce^{-ik(x+iz)}$$
$$=-c(x+iz)+i\alpha ce^{kz}(\cos kx-i\sin kx)$$

故

$$\varphi=-cx+\alpha ce^{kz}\sin kx, \quad \psi=-cz+\alpha ce^{kz}\cos kx.$$

9

在任一条流线上 $\psi=$常数。自由面是 $\psi=0$，$e^{kz}\simeq 1$，所以自由面

$$\boxed{z=\alpha\cos kx}$$

压力可以用Bernoulli方程式来定

$$\frac{p}{\rho}=-gz-\frac{1}{2}v^2+C$$

而 $v^2=(-c+\alpha cke^{kz}\cos kx)^2+(\alpha cke^{kz}\sin kx)^2$

$$\cong c^2-2\alpha c^2ke^{kz}\cos kx$$

再用公式

$$\alpha ce^{kz}\cos kx=\psi+cz$$

就有

$$v^2=c^2-2ck(\psi+cz)=c^2-2ck\psi-2kc^2z$$

故

$$\frac{p}{\rho}=-gz+kc^2z+kc\psi-\frac{1}{2}c^2+C$$

$$=(kc^2-g)z+kc\psi+\text{常数}$$

流线上 $\psi=0$ 上的压力 p 保持不变，故 z 的系数一定要是另，故

$$c^2=\frac{g}{k}=\frac{g\lambda}{2\pi},\quad \lambda=\frac{2\pi c^2}{g}。$$

群速度　我們把两个不同波长的进行波相疊加

$$\varphi=\frac{ag}{\sigma}e^{kz}\sin(kx-\sigma t)+\frac{ag}{\sigma'}e^{k'z}\sin(k'x-\sigma' t)$$

式中

$$\sigma'=\sqrt{gk'}$$

在这种情况下，自由面的形状是

$$\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,0,t)}{\partial t}=a\left[\cos(kx-\sigma t)+\cos(k'x-\sigma' t)\right]$$

$$=2a\cos\left[\frac{k+k'}{2}x-\frac{\sigma+\sigma'}{2}t\right]\cos\left[\frac{k-k'}{2}x-\frac{\sigma-\sigma'}{2}t\right]$$

因此如果 k,k'；σ,σ' 的差别不大，那么这是一群一群的高频 $\frac{k+k'}{2}\sim k$ 的波的前进。波速依旧是 $c=\frac{\sigma+\sigma'}{k+k'}\sim\frac{\sigma}{k}$，而群速则

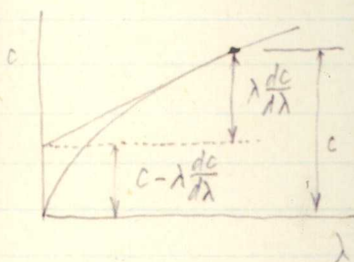
是
$$\frac{\sigma-\sigma'}{k-k'}=\frac{d\sigma}{dk}=u$$

在这儿 $\sigma=\sqrt{gk}$， $\frac{d\sigma}{dk}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=\frac{1}{2}\frac{\sigma}{k}=\boxed{\frac{1}{2}c=u}$

这就是说波传播的群速度要比个别波的传播速度小一半。这表示当已定的波I着走了两个波的距离而达到I'的位置时，整个波群还只移动了一个波的距离，因此所研究的波I的振幅就增大了。以后，这波的振幅将继续增大，直到最大值，然后就开始减小，如此类推。因此我们就可看出，在传播时，已已定的波将在波群中沿着 Ox 正轴方向移动。波可以相对于波群传播。

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \sigma=kc=\frac{2\pi c}{\lambda}$$

故
$$u=\frac{d\sigma}{dk}=\frac{d\left(\frac{c}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}=\frac{\frac{\lambda dc-cd\lambda}{\lambda^2}}{-\frac{d\lambda}{\lambda^2}}=\boxed{c-\lambda\frac{dc}{d\lambda}=u}$$



所以只有当 $dc/d\lambda=0$ 时 $u=c$.

在有限深度液体中的波　我们还是用以前的解的形式

$$\varphi=\Phi(x,z)\cos(\sigma t+\varepsilon)$$

$$\Phi(x,z)=P(z)\sin k(x-\xi)$$

所以
$$P(z)=C_1e^{kz}+C_2e^{-kz}=C_1\operatorname{ch}k(z+h)+K_2\operatorname{sh}k(z+h)$$
~~$=K_1\operatorname{ch}h$~~

我们知道如果底在 $z=-h$，那么当 $z=-h$ 的时候
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$$

显然
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\left[C k\operatorname{sh}k(z+h)+kK_2\operatorname{ch}k(z+h)\right]\sin k(x-\xi)$$

11

所以为了满足边界条件 $K_2=0$。故

$$\varphi(x,z,t)=C\,\mathrm{ch}\,k(z+h)\sin k(x-\xi)\cos(\sigma t+\varepsilon)$$

自由面上的条件是 $z=0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\sigma^2}{g}\varphi$$

所以

$$k\,\mathrm{sh}\,kh=\frac{\sigma^2}{g}\,\mathrm{ch}\,kh\ ;\qquad \boxed{\sigma^2=gk\,\mathrm{th}\,kh}$$

因此

$$T=\frac{2\pi}{\sigma}=\frac{2\pi}{\sqrt{gk\,\mathrm{th}\,kh}}=\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g\,\mathrm{th}\frac{2\pi h}{\lambda}}}$$

而自由面的形状是

$$\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,0,t)}{\partial t}=\frac{C\sigma}{g}\,\mathrm{ch}\,kh\sin k(x-\xi)\sin(\sigma t+\varepsilon)$$

如果我们令

$$\frac{C\sigma}{g}\,\mathrm{ch}\,kh=a$$

那么驻波最后的解的形式就成为

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi&=\frac{ag}{\sigma}\frac{\mathrm{ch}\,k(z+h)}{\mathrm{ch}\,kh}\sin k(x-\xi)\cos(\sigma t+\varepsilon)\\ \zeta&=a\sin k(x-\xi)\cos(\sigma t+\varepsilon)\end{aligned}}$$

而进行波的形式是

$$\varphi=\frac{ag}{\sigma}\frac{\mathrm{ch}\,k(z+h)}{\mathrm{ch}\,kh}\sin(kx-\sigma t)$$

$$\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,0,t)}{\partial t}=a\cos(kx-\sigma t)$$

所以余弦波的波速是

$$c=\frac{\sigma}{k}=\sqrt{g\frac{\mathrm{th}\,kh}{k}}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

，我们注意波速的影响是只与$\left(\frac{h}{\lambda}\right)$比为定的

我们在这里看出来波速又只与 g，λ，h 等有关，与液体的密度、p_0 都无关。

当 $h\to\infty$，$\mathrm{th}\frac{2\pi h}{\lambda}\to 1$，那么

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

也就是我们以前所熟知的。

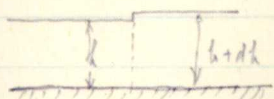
12

但是当 $h \ll 1$, $\text{th}\frac{2\pi h}{\lambda} \cong \frac{2\pi h}{\lambda}$

那么

$$c=\sqrt{gh}$$

这就是说波速在浅水中只与水深有关，与波长无关！这个简单的关系是很重要的，我们以后还要用它。要求这个关系也很容易，



$$ch=(c+dc)(h+dh)$$

$$\rho(c+dc)^2(h+dh)-\rho c^2 h=\rho\frac{g}{2}h^2-\rho\frac{g}{2}(h+dh)^2$$

也就是

$$\left.\begin{aligned}0&=cdh+hdc\\ 2chdc+c^2dh&=-ghdh\end{aligned}\right\}\quad chdc=-ghdh$$

$$c=-g\frac{dh}{dc}=g\frac{h}{c}$$

$$\therefore\ \boxed{c=\sqrt{gh}}$$

因为在深水情况下 $c\sim\sqrt{\lambda}$，所以当水深逐渐减小时，长波的传播速度逐渐减小，而短波的速度逐渐增加！

群速：

$$u=\frac{d\sigma}{dk}=\frac{d}{dk}\sqrt{gk\,\text{th}\,kh}=\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k\,\text{th}\,kh}}\left\{\text{th}\,kh+\frac{kh}{\text{ch}^2kh}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\,\text{th}\,kh}{k}}\left\{1+\frac{2kh}{\text{sh}\,2kh}\right\}=\frac{1}{2}c\left(1+\frac{2kh}{\text{sh}\,2kh}\right)$$

因为 $2kh/\text{sh}\,2kh$ 在 $h=0$ 时为 1，当 h 逐渐增加时逐渐减小，在 $h\to\infty$ 时为 0，所以群速由深水时的 $\frac{1}{2}c$ 逐渐增到 c。

在空气与水交界面上的波

我們来研究在空气与水交界面上的波。我們假设空气本来不动，其在表面的压力为 p_1，其速度势为 φ_1；水本来有一个平行于 x-轴的速度 U，其表面的压力为 p_2，其速度势为 φ_2。如果要研究的是进行波，那么

$$\varphi_1=C_1e^{-kz}\sin(kx-\sigma t)$$

$$\varphi_2=Ux+C_2e^{kz}\sin(kx-\sigma t)$$

这也就是说如果 $\sigma>0$，那么波的方向是同 x-轴向相同的。

13

如果我們来计算 ζ，我們必需看到如果空气的密度是 ρ_1，水的密度是 ρ_2，

$$\frac{p_1-p_0}{\rho_1} = -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{z=0} - g\zeta$$

$$= +C_1\sigma\cos(kx-\sigma t) - g\zeta$$

而

$$\frac{p_2-p_0}{\rho_2} = -\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)_{z=0} - U\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_{z=0} - g\zeta = C_2\sigma\cos(kx-\sigma t) - UC_2k\cos(kx-\sigma t) - g\zeta$$

$$= C_2(\sigma-Uk)\cos(kx-\sigma t) - g\zeta$$

所以

$$p_1-p_0 = C_1\rho_1\sigma\cos(kx-\sigma t) - \rho_1 g\zeta$$

$$p_2-p_0 = C_2\rho_2(\sigma-Uk)\cos(kx-\sigma t) - \rho_2 g\zeta$$

可是 (p_1 / p_2)

$$p_1-p_2 = \alpha\frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

因此

$$\left[C_1\rho_1\sigma - C_2\rho_2(\sigma-Uk)\right]\cos(kx-\sigma t) - (\rho_1-\rho_2)g\zeta = \alpha\frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

我們看到如果要表面張力与引力佔同等重要的地位，那么

$$\frac{\alpha}{\lambda^2}\sim\rho_2 g,\quad \lambda\sim\sqrt{\frac{\alpha}{\rho_2 g}}$$

但从另一面看，我們知道

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + U\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

如果

$$\zeta = a\cos(kx-\sigma t)$$

那么

$$C_2k = +a\sigma - Uak = a(\sigma-Uk) = C_2k \qquad C_2 = a\left(\frac{\sigma}{k}-U\right)$$

$$a\sigma = C_1k \qquad C_1 = a\left(\frac{\sigma}{k}\right)$$

所以

$$\left[a\frac{\sigma}{k}\rho_1\sigma - a\left(\frac{\sigma}{k}-U\right)\rho_2(\sigma-Uk)\right] - (\rho_1-\rho_2)ga = -a\alpha k^2, \quad 而\ \frac{\sigma}{k}=c$$

因此

$$+c^2\rho_1 + (c-U)^2\rho_2 + (\rho_1-\rho_2)g\frac{\lambda}{2\pi} - \alpha\frac{2\pi}{\lambda} = 0$$

也就是说

$$(\rho_2+\rho_1)c^2 - 2U\rho_2c + \left[\rho_2U^2 - (\rho_2-\rho_1)g\frac{\lambda}{2\pi} - \frac{\alpha 2\pi}{\lambda}\right] = 0$$

14

所以 $c = \frac{U\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \pm \sqrt{\frac{U^2\rho_2^2}{(\rho_1+\rho_2)^2} + \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2} g\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\alpha 2\pi}{(\rho_1+\rho_2)\lambda} - \frac{\rho_2 U^2}{\rho_1+\rho_2}}$

$$c = \frac{U\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\right) + \frac{2\pi\alpha}{\lambda(\rho_1+\rho_2)} - \frac{\rho_1\rho_2 U^2}{(\rho_1+\rho_2)^2}}$$

我們看得出来，如果

$$0 < U < \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2} + \frac{2\pi\alpha}{\rho_2\lambda}}$$

的时候有一个 c 的值將是負的，也就是说波將逆水向而傳播。

但是更有意义的是，问什么时候（也就是什么 U），不论什么波长都会造成 c 的复數值。我们首先去

$$\frac{g\lambda}{2\pi}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}\right) + \frac{2\pi\alpha}{\lambda(\rho_2+\rho_1)}$$

的最小值。也就是

$$\frac{g}{2\pi}(\rho_2-\rho_1) = \frac{2\pi\alpha}{\lambda_m^2}$$

$$\lambda_m^2 = (2\pi)^2\left[\frac{\alpha}{g(\rho_2-\rho_1)}\right], \qquad \lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{g(\rho_2-\rho_1)}} \cong 2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{g\rho_2}}$$

所以条件是

$$U^2 < \frac{2g(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2)}{2\pi\rho_1\rho_2} 2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{g(\rho_2-\rho_1)}} = \frac{2}{\rho_1\rho_2}\sqrt{\alpha g(\rho_2-\rho_1)(\rho_2+\rho_1)^2}$$

也就是说

$$U < \sqrt[4]{\frac{4g\alpha(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2)^2}{\rho_1^2\rho_2^2}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{4g\alpha}{\rho_2}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2}{(\rho_1/\rho_2)^2}}$$

我们具体计算的（用 $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{770}$，$\alpha = 74$ 达因/厘米）结果是 $U = 6.46$ 米/秒。$\lambda_m = 1.78$ 厘米。这一个速度的意义是：如果 $U > 6.46$ 米/秒，那么总会有一个波长使得 c 为复数。c 为复数的意义就在于

$$c = c_r \pm i c_i$$

15

那么

$$\cos(kx-\sigma t)=\cos k(x-ct)$$
$$=\cos k(x-c_r t\mp i c_i t)$$
$$=\cos(kx-kc_r t)\cos ikc_i t\pm\sin(kx-kc_r t)\sin ikc_i t$$
$$=\cos(kx-kc_r t)\,\mathrm{ch}\,kc_i t\pm i\sin(kx-kc_r t)\,\mathrm{sh}\,kc_i t$$

也就是说波动

$$\cos(kx-\sigma t)=Re\, e^{i(kx-\sigma t)}=Re\, e^{ikx-ikc_r t\pm c_i t}$$
$$=e^{\pm c_i t}\cos k(x-c_r t)$$

也就是说波将随时间而扩大，所以是不稳定的。这也就是说水流速度如果大于6.46米/秒，水面将不稳定，交界面将破而成空气和水掺和现象。实验结果也是如此。数值是6−7米/秒。

这种研究方法是一个比较普遍的方法。流体及气体力学里我们对一种不稳定现象总是用微小干扰的方法研究一种平衡状态的稳定性，从而得出稳定参数的临界值。

风力生波的问题：

如果我们把上面一个问题的座标系统换一下，让观察者随着水流走，那么对这个观察者来说，水是不动的，而是空气沿着 x-轴的反向运动。一切速度都加上一个 $-U$，而在新座标系统里的波速 c 是老座标系统的 $c-U$，即

$$c=(c-U)=-\frac{\rho_1 U}{\rho_1+\rho_2}\pm\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2}+\frac{2\pi\alpha}{\lambda(\rho_1+\rho_2)}-\frac{\rho_1\rho_2 U^2}{(\rho_1+\rho_2)^2}}$$

（见柯钦书，第494页）

而波稳定的 U 还是

$$0<U<\sqrt[4]{\frac{4g\alpha(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2)^2}{\rho_2^2\rho_1^2}}=6.46\text{米/秒}$$

照这么一幅图画，（因为自然的现象不能以人的观察方法而改变），风速在6.46米/秒以上，就能产生波。~~（？微风）~~

但是这样的理论能产生的波，其波长很小（1.2厘米），说一池春水被吹皱了是可以，说造成波浪则不了。波浪的形成看来是不能用这样的理论来解释的了。有人提议，波浪的形成是由于空气流在波后的分离，造成非对称的力，因而风可以对水作功。但是这个问题还需要进一步研究才能搞清楚。

有限幅度的波　如果波幅与波长的比不那么小，那么我们在这两讲里所用的线性理论就失去它的依据。我们不能用线性理论，必需用非线性理论，这我们将在第八讲里谈这个问题。

16

第三讲 波阻

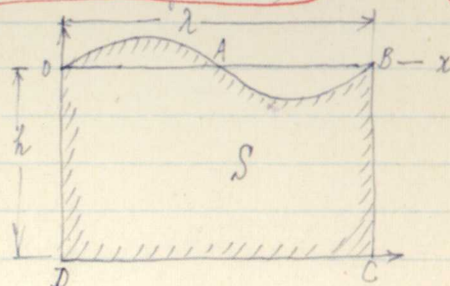
波的能量

我們現在將回到有限深度水中的表面波（不考慮張力），我們要研究一下波的運动所包含的能量。令波的週期為λ。

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\qquad v^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

$$\varphi=\frac{ag}{\sigma}\frac{ch\,k(z+h)}{ch\,kh}\sin kx\cos\sigma t\qquad(\sigma^2=gk\,th\,kh)$$

$$\zeta=a\sin kx\sin\sigma t$$



因此，在長度為λ中的动能就等于

$$T=\frac{1}{2}\rho\iint_S\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dz$$

如果我們用格林公式，那么

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_L\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

其中 L 是面积 S 的边界，n 是 L 的外法线。但根据边界条件 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$，沿CD的积分便消失了。函數 φ 在垂线 OD及BC上因週期条件而是相等的，可是 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 则因同一条件而是反向等值的，所以 $\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 的积分在 OD及BC 相互抵消。结果只剩余下

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}dx\qquad\text{(这也是用了近似的计算)}$$

我們计算位能的方法是：ζ 的波高使一直竖条的液体 ζdx 的重心上升了 $\zeta/2$，因此在λ中的位能是

$$V=\frac{1}{2}\rho g\int_0^\lambda\zeta^2dx$$

现在我们可以直接计算了，我们先計算动能，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{agk}{\sigma}\frac{sh(z+h)}{ch\,kh}\sin kx\cos\sigma t$$

$$T=\frac{1}{2}\rho\frac{a^2g^2k\,sh\,kh}{\sigma^2ch\,kh}\cos^2\sigma t\int_0^\lambda\sin^2kx\,dx=\frac{1}{2}\rho a^2g^2k\,th\,kh\cos^2\sigma t\,\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{2}\rho a^2g\frac{\lambda}{2}\cos^2\sigma t$$

也就是说

$$T=\frac{\rho a^2g\lambda}{4}\cos^2\sigma t$$

同样地，我们得出了

$$V=\frac{1}{2}\rho g a^2\sin^2\sigma t\int_0^\lambda\sin^2kx\,dx=\frac{\rho a^2g\lambda}{4}\sin^2\sigma t$$

17

因此对驻波来讲，第一、$T+V=\frac{\rho a^2 g\lambda}{4}$；总和是不变的

第二，动能与位能永远在彼此交换着。

第三，平均值彼此相等。

对进行波，我们有 $\varphi=\frac{ag}{\sigma}\frac{ch\,k(z+h)}{ch\,kh}\sin(kx-\sigma t)$；$\zeta=a\cos(kx-\sigma t)$

可以得到 $T=V=\frac{\rho a^2 g\lambda}{4}$，$T+V=\frac{\rho a^2 g\lambda}{2}$

因此，在这里动能和位能都各自保持为常数。而总能量是↓。

<u>能量的转移</u>。 取进行波，例如在无限深度的液体中，

$$\varphi=\frac{ag}{\sigma}e^{kz}\sin(kx-\sigma t)$$

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{agk}{\sigma}e^{kz}\cos(kx-\sigma t)=a\sigma e^{kz}\cos(kx-\sigma t)$$

而压力 $\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz=age^{kz}\cos(kx-\sigma t)-gz$

我们现在取一条在 oy 方向为一的一条 oyz 平面，我们来计较由于压力所作的功，这显然是 $pv_x\,dz\,dt$，而

$$pv_x\,dz\,dt=\left[a^2g\sigma\rho e^{2kz}\cos^2(kx-\sigma t)+(p_0-\rho gz)a\sigma e^{kz}\cos(kx-\sigma t)\right]dz\,dt$$

在一个周期 $T=\frac{2\pi}{\sigma}$ 中，这些力所做的功将等于

$$a^2g\sigma\rho e^{2kz}\frac{\pi}{\sigma}dz=\pi a^2g\rho e^{2kz}dz$$

而整个条上的功将是 $W=\pi a^2g\rho\int_{-\infty}^{0}e^{2kz}dz=\frac{\pi a^2g\rho}{2k}=\frac{\pi a^2g\rho\lambda}{4\pi}=\frac{a^2g\rho\lambda}{4}$

而在单位时间所作的平均功是

$$W_1=\frac{a^2g\rho}{4}\cdot\frac{\lambda}{T}=\frac{a^2g\rho}{4}c$$

可是 $c=2u$，故 $W_1=\frac{1}{2}a^2g\rho u$

而这就是代表平均每单位 x-方向的总能量，而<u>能量转递的速度是群速度 u</u>。这一个结果

也出现于其他的波的运动。

波阻 与能量傳遞密切相关的是波阻问题。例如，假定在以速度 c 移动的船后形成了波，那么这些波的传播速度就等于 c。如以 E 表示在单位長度上的波能，则每秒中我们将有許多的波能 cE。但这个能量的一部分是由早先形成的波所转移过来的。正是这些波把 $UE=\frac{c}{2}E$ 大小的能量带过每一个平面。剩下的能量 $(c-U)E=\frac{c}{2}E$ 必須由船得来。因此船在每单位时间中产生 $\frac{cE}{2}$ 的功来造波；所以造波阻力 R 可以如下式求得

$$Rc=\frac{Ec}{2},\qquad \boxed{R=E/2}=E\left(\frac{c-U}{c}\right)$$

在自由面下的旋

我們先换一下座标的符号，$x\to x$，$z\to y$，並且引用复变数

$$z=x+iy$$

和复速度势

$$w=\varphi+i\psi。$$

令一个强度为 Γ 的旋沿在自由面下 h 的深度以等速度 c 平行于 Ox 正轴运动。

为了把运动变成一个定常的，我们在上述的流动上叠加上一个负向 c 速度，那么没有 Γ 的情形是 $W=-cz$，$\Phi=-cx$，$\Psi=-cy$；而有 Γ 时

$$W=w-cz,\quad \Phi=\varphi-cx,\quad \Psi=\psi-cy$$

φ 和 ψ 以及 w 就成为因 Γ 而引起的函数。

根据 Bernoulli 公式，

$$p=C-\frac{1}{2}\rho\left(v_x^2+v_y^2\right)-\rho g y$$

而其中

$$v_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-c$$

$$v_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

故

$$p=C-\frac{1}{2}\rho c^2+\rho c\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-\rho g y$$

现在我們假设在自由面上 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ 很小，因此二次项可以略去不計。那么在自由面上

$$p_0=C-\frac{1}{2}\rho c^2+\rho c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\text{自由面}}-\rho g\delta(x)$$

19

而其中 $\delta(x)=y$ 是自由面的高度。

因为在旋涡的前方不应该有干扰，所以

$$\lim_{x\to\infty}\delta(x)=0$$

而另一方面，当 Γ 不存在时，$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\delta=0$，而

$$p_0=C-\frac{1}{2}\rho c^2$$

因此在自由面的条件是

$$g\delta(x)=c\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{y=0}$$

或

$$g\delta(x)=c\frac{\partial(x,0)}{\partial x}$$

而自由面是一条流线，故

$$\Psi=0\ ,\quad y=\delta(x)$$

即

$$c\delta(x)=\psi(x,\delta)\sim\psi(x,0)=c\delta(x)$$

如果我们引入

$$\frac{g}{c^2}=\nu$$

在 $y=0$ 上，

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\nu\psi$$

但是

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=R_e\frac{dw}{dz}=I_m\, i\frac{dw}{dz}\ ,\qquad \psi=I_m\, w$$

因此，边界条件就可以换写为，在 $y=0$ 上

$$I_m\left(i\frac{dw}{dz}-\nu w\right)=0$$

现在我们令
$$i\frac{dw}{dz}-\nu w=f(z)=\varphi'+i\psi'$$

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial\psi'}{\partial y}+i\frac{\partial\psi'}{\partial x}$$

但是在 $y=0$ 上，$\psi'=0$，$\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0$，故

$$I_m\left(i\frac{d^2w}{dz^2}-\nu\frac{dw}{dz}\right)=0\ ,\quad 在\ y=0\ 上$$

正如已经说过的，$x\to+\infty$ 时，$\left|\frac{dw}{dz}\right|\to0$；而 $|z|\to\infty$ 时显然 $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ 必需是有界的。

20

在我们现在所考虑的那个旋涡运动的特殊情形中，函数 除去旋涡所在的一点以外，必须在整个 $y<0$ 的半平面中是全纯的。假定旋涡位于坐标为 $x=0$，$y=-h$ 的点 $z=-ih$ 之上，在这点附近，函数 $w(z)$ 应该具有形式

$$w(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+ih)+g(z)$$

此中 $g(z)$ 是点 $z=-ih$ 的邻域中的全纯函数。因而

$$f(z)=i\frac{d^2w}{dz^2}-\nu\frac{dw}{dz}=-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z+ih)^2}-\frac{\Gamma\nu}{2\pi i}\frac{1}{z+ih}+f_1(z)$$

而这里 $f_1(z)$ 是点 $z=-ih$ 的邻域中的全纯函数。

但是我们已经肯定了，$f(z)$ 在实数轴上是有实数值的。但那时，这个在 $y<0$ 半平面上给定的函数，可根据 Schwarz 对称原理而将其解析拓展到 $y>0$ 的上半平面中去。就是函数 $f(z)$ 在对于 x 轴对称的两个点上的值必须是共轭复数，

$$f(x+iy)=\overline{f(x-iy)}$$

这时得到的已是在整个复变数 z 的平面上的解析函数。这函数在点 $z=-ih$ 上有奇点，而在 $z=+ih$ 上还有奇点。在这 $z=+ih$ 的邻域中我们有表达式

$$f(z)=-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z-ih)^2}+\frac{\Gamma\nu}{2\pi i}\frac{1}{z-ih}+\bar{f}_1(z)$$

这表示点 $z=ih$ 是函数 $f(z)$ 的二级极点。在有限的距离内，这函数就没有任何其他的奇点了。因为要在 $z=\pm\infty$ 时 $f(z)$ 变为零，所以函数在无穷远点中的邻域中是全纯的，故

$$f(z)=i\frac{d^2w}{dz^2}-\nu\frac{dw}{dz}=-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z+ih)^2}-\frac{\Gamma\nu}{2\pi i}\frac{1}{z+ih}-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z-ih)^2}+\frac{\Gamma\nu}{2\pi i}\frac{1}{z-ih}$$

所以现在的问题是解上面的方程式，而要当点 z 沿正实轴趋近于无穷远处时 $(z\to+\infty)$，$w\to0$。

故令

$$w=A(z)+B(z)e^{-i\nu z}$$

，而设 $\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}e^{-i\nu z}=0$，那么

$$\frac{dw}{dz}=0-i\nu B(z)e^{-i\nu z}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=-\nu^2B(z)e^{-i\nu z}-i\nu\frac{dB}{dz}e^{-i\nu z}$$

因此
$$\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}e^{-i\nu z}=0$$

$$\nu\frac{dB}{dz}e^{-i\nu z}=-\frac{\Gamma}{2\pi}\left\{\frac{1}{(z+ih)^2}-\frac{\nu i}{z+ih}+\frac{1}{(z-ih)^2}+\frac{\nu i}{z-ih}\right\}$$

或者我们可以换写作
$$\frac{dA}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\left\{\frac{1}{(z+ih)^2}-\frac{\nu i}{z+ih}+\frac{1}{(z-ih)^2}+\frac{\nu i}{z-ih}\right\}$$

$$\frac{dB}{dz}=-\frac{\Gamma}{2\pi\nu}e^{i\nu z}\left\{\frac{1}{(z+ih)^2}-\frac{\nu i}{z+ih}+\frac{1}{(z-ih)^2}+\frac{\nu i}{z-ih}\right\}$$

我们的条件是 $A\to 0,\ z\to+\infty$；$B\to 0,\ z\to+\infty$。故我们得出，
$$A=-\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\left\{\frac{1}{z+ih}+\frac{1}{z-ih}\right\}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z+ih}{z-ih}$$

$$B=-\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\int_{t=+\infty}^{z}e^{i\nu t}\left[\frac{1}{(t+ih)^2}+\frac{1}{(t-ih)^2}-\frac{\nu i}{t+ih}+\frac{\nu i}{t-ih}\right]dt$$

但是
$$\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}dt}{(t+ih)^2}=-\int_{+\infty}^{z}e^{i\nu t}d\left(\frac{1}{t+ih}\right)=-\frac{e^{i\nu z}}{z+ih}+i\nu\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t+ih}dt$$

$$\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}dt}{(t-ih)^2}=-\frac{e^{i\nu z}}{t-ih}+i\nu\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}dt}{t-ih}$$

所以把结果整理以后，就是
$$w(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z+ih}{z-ih}+\frac{\Gamma}{\pi i}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}dt$$

这就是最后的解的结果。

现在我们可以来计算自由面的形状了：
$$\delta(x)=\frac{c}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{y=0}=\frac{c}{g}Rw'(x)$$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z+ih}+\frac{1}{z-ih}\right\}-\frac{\Gamma\nu}{\pi}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}dt.$$

我们令 $z=x$，然后取其实数部分，即得

$$\delta(x) = -\frac{\Gamma}{\pi c}\int_{+\infty}^{x} \frac{t\cos\nu(t-x) - h\sin\nu(t-x)}{t^2+h^2}\,dt$$

显然，有

$$\lim_{x\to\infty}\delta(x)=0$$

所以我们知道这是符合我们所提的边界条件的。而在旋涡的后方，我们最好把积分改一下：

$$\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih}+\int_{-\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih} = -2\pi i\, e^{-\nu h}+\int_{-\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih}$$

所以

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z+ih}+\frac{1}{z-ih}\right\}+2\Gamma\nu i\, e^{-\nu h}e^{-i\nu z}-\frac{\Gamma\nu}{\pi}e^{-i\nu z}\int_{-\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}\,dt}{t-ih}$$

因此

$$\delta(x) = \frac{2\Gamma}{c}e^{-\nu h}\sin\nu x - \frac{\Gamma}{\pi c}\int_{-\infty}^{x} \frac{t\cos\nu(t-x) - h\sin\nu(t-x)}{t^2+h^2}\,dt$$

这中的积分当 $x\to-\infty$ 时趋于零，因而在 $x\to-\infty$ 时

$$\delta(x)\sim\frac{2\Gamma}{c}e^{-\nu h}\sin\nu x$$

这表明离旋涡后甚远之处，液体的自由边界是正弦波的形状，其振幅是

$$a=\frac{2\Gamma}{c}e^{-\nu h}=\frac{2\Gamma}{c}e^{-\frac{gh}{c^2}}$$

h增则a减！

而波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{\nu}=\frac{2\pi c^2}{g}$$

也正是以 c 为波速的波长。

此外，

$$\int_{+\infty}^{x} \frac{t\cos\nu(t-x) - h\sin\nu(t-x)}{t^2+h^2}\,dt$$

中，如以 $-t'$ 代 t，$dt=-dt'$，即成

$$\int_{-\infty}^{-x} \frac{t'\cos\nu(t'+x) - h\sin\nu(t'+x)}{t'^2+h^2}\,dt'.$$

也就是 $\int_{-\infty}^{x} \frac{t\cos\nu(t-x) - h\sin\nu(t-x)}{t^2+h^2}\,dt$ 积分在 $x\to-x$ 时的值，因此自由面

的形状是一个对称部分 加一个波。

现在我们来计算一下作用在旋涡上的力：依照 Чаплыгин 公式

$$Y+iX=-\frac{\rho}{2}\oint\left(\frac{dW}{dz}\right)^2dz\,,\qquad \oint \text{是绕 } z=-ih \text{ 点的}$$

而其中

$$W(z)=w-cz=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z+ih}{z-ih}+\frac{\Gamma}{\pi i}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}dt-cz$$

所以

$$\frac{dW}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z+ih}+\left\{-\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z-ih}+\frac{\Gamma}{\pi i}\frac{1}{z-ih}-\frac{\Gamma\nu}{\pi}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}dt\right\}-c$$

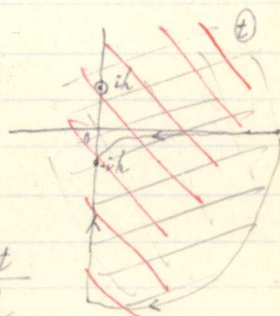
$$=\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z+ih}+\underbrace{\left\{-c+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z-ih}-\frac{\Gamma\nu}{\pi}e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z}\frac{e^{i\nu t}}{t-ih}dt\right\}}_{\alpha(z)}$$

$\alpha(z)$ 是在下半平面的全纯函数。因此，函数

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2=-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{(z+ih)^2}+\frac{\Gamma\alpha(z)}{\pi i\,(z+ih)}+\alpha^2(z)$$

在 $z=-ih$ 上的残数是 $\Gamma\alpha(-ih)/\pi i$，故

$$\oint\left(\frac{dW}{dz}\right)^2dz=2\Gamma\,\alpha(-ih)$$



因而

$$Y+iX=-\rho\Gamma\alpha(-ih)=\rho\Gamma c-\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h}+\frac{\rho\Gamma^2\nu}{\pi}e^{-\nu h}\int_{+\infty}^{-ih}\frac{e^{i\nu t}dt}{t-ih}$$

~~我们让 $u=-i\nu(t-ih)=-i\nu t-\nu h$~~

~~$$\int_{+\infty}^{-ih}\frac{e^{i\nu t}dt}{t-ih}=\int_{-i\infty}^{-ih}\frac{e^{-i\nu t}dt}{t-ih}=e^{\nu h}\int_{-i\infty}^{-ih}\frac{e^{-i\nu t-\nu h}dt}{t-ih}=e^{\nu h}\int_{-\infty}^{-2\nu h}\frac{e^{u}du}{u}$$~~

现在我们来研究 $\int_{+\infty}^{-ih}\frac{e^{+i\nu t}dt}{t-ih}$。我们可以把积分的线路改一下，

所以 $$\int_{+\infty}^{-ih}\frac{e^{+i\nu t}dt}{t-ih} = -\pi i e^{-\nu h} + \int_{+i\infty}^{+3ih}\frac{e^{+i\nu t}dt}{t-ih} + \int_{+3ih}^{-ih}\frac{e^{+i\nu t}dt}{t-ih}$$

让 $u = i\nu(t-ih)$, $du = i\nu dt$

$$\int_{+i\infty}^{+3ih}\frac{e^{+i\nu t}dt}{t-ih} + \int_{+3ih}^{-ih}\frac{e^{+i\nu t}dt}{t-ih} = e^{-\nu h}\left[\int_{-\infty}^{-2\nu h}\frac{e^{u}du}{u} + \int_{-2\nu h}^{+2\nu h}\frac{e^{u}du}{u}\right]$$

$$= e^{-\nu h}\left[Ei(-2\nu h) + \int_{0}^{2\nu h}\frac{e^{u}du}{u} + \int_{-2\nu h}^{0}\frac{e^{u}du}{u}\right] = e^{-\nu h}\left\{Ei(-2\nu h) + \int_{0}^{2\nu h}\frac{(e^{u}-e^{-u})du}{u}\right\}$$

$$= e^{-\nu h}\left\{Ei(-2\nu h) + 2\mathfrak{S}i(2\nu h)\right\}$$，而 $\mathfrak{S}i\, x = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t}dt$

因此

$$Y + iX = \left\{\rho\Gamma c - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h} + \frac{\rho\Gamma^2\nu}{\pi}e^{-2\nu h}\left[Ei(-2\nu h) + 2\mathfrak{S}i(2\nu h)\right]\right\} - i\rho\Gamma^2\nu e^{-2\nu h}$$

也就是说

$$X = -\frac{\rho g\Gamma^2}{c^2}e^{-2\frac{gh}{c^2}}$$

$$Y = \rho c\Gamma - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h} + \frac{\rho g\Gamma^2}{\pi c^2}e^{-\frac{2gh}{c^2}}\left\{Ei\left(-\frac{2gh}{c^2}\right) + 2\mathfrak{S}i\left(\frac{2gh}{c^2}\right)\right\}$$

$-X$ 就是波阻，R；可是 R 也能从尾波的波幅表示；如果我们用 a 为波幅

$$R = \frac{1}{4}a^2 g\rho = \frac{1}{4}g\rho\left(\frac{2\Gamma}{c}e^{-\frac{gh}{c^2}}\right)^2 = \frac{\rho g\Gamma^2}{c^2}e^{-\frac{2gh}{c^2}} = -X$$。

$\frac{c^2}{gh}$ 也就是对深度来说的福罗特数。

第四讲

水面滑行的平板

作用在自由表面上的力 F

我们在以前曾经讨论过在负 x-轴向以 c 速流动的水中，如果水面是

$$\zeta = a\cos kx$$

那么在水面上

$$\frac{p-p_0}{\rho} = (kc^2-g)a\cos kx$$

也就是说在水面上的压力分布是

$$p-p_0 = \rho(kc^2-g)a\cos kx.$$

我们现在要研究的是一个在 $x=0$ 点上的 F 力，也就是说在水面上

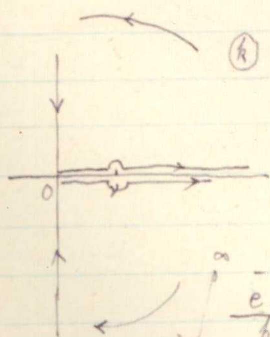
$$p-p_0 = F\cdot\delta(x)$$

$\delta(x)$ 是一个单位冲量的函数。但是我们也可以用福氏积分来表示 $F\cdot\delta(x)$

$$\pi F\cdot\delta(x) = F\cdot\int_0^\infty \cos kx\,dk\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\cos k\xi\,d\xi = F\cdot\int_0^\infty \cos kx\,dk$$

也就是说 F 力是 $\frac{1}{\pi}F\cos kx$ 的叠加。所以相应的 $\zeta(x)$ 就应该是 $\frac{F}{\pi\rho}\frac{\cos kx}{kc^2-g}$ 的叠加。即

$$\zeta(x) = \frac{F}{\pi\rho c^2}\int_0^\infty \frac{\cos kx}{k-\nu}dk = \frac{F}{2\pi\rho c^2}\int_0^\infty \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{k-\nu}dk$$



(a) 如果 $x>0$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ikx}dk}{k-\nu} = \pi i e^{i\nu x} + \int_0^{i\infty}\frac{e^{ikx}dk}{k-\nu} \qquad k=it,\quad dk=i\,dt$$

$$= \pi i e^{i\nu x} + \int_0^\infty \frac{e^{-tx}dt}{t+i\nu};$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ikx}dk}{k-\nu} = -\pi i e^{-i\nu x} + \int_0^{-i\infty}\frac{e^{-ikx}dk}{k-\nu} \qquad k=-it$$

$$= -\pi i e^{-i\nu x} + \int_0^\infty \frac{e^{-tx}dt}{t-i\nu}$$

因此

$$\zeta(x) = \frac{F}{2\pi\rho c^2}\left\{-2\pi\sin\nu x + 2\int_0^\infty \frac{t e^{-tx}dt}{t^2+\nu^2}\right\}.$$

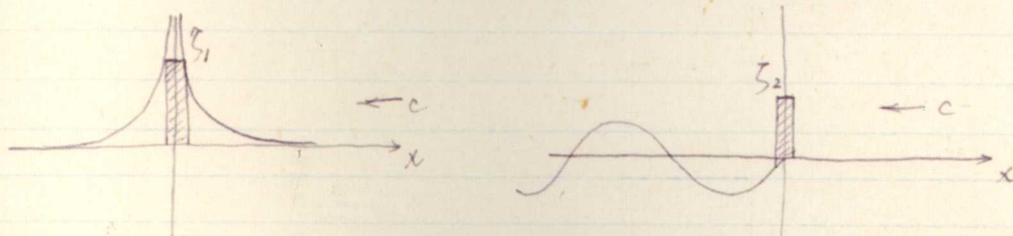
如果 $x<0$，
$$\zeta(x)=\frac{F}{2\pi\rho c^2}\left\{2\pi\sin\nu x+2\int_0^\infty\frac{te^{-t|x|}}{t^2+\nu^2}dt\right\}$$

但是从现象的性质出发，我们知道 $x\to\infty$，$\zeta(x)\to 0$。而从上面的计算来看，在 $x\to\infty$ 时还有一个波 $-2\pi\sin\nu x$ 存在，怎么办？我们从计算知道 $k=\nu$ 是自由波，也就是这样一个波不会产生水面的压力分布。所以我们可以在我们的解上面的加上一个 $2\pi\sin\nu x\cdot\frac{F}{2\pi\rho c^2}$ 而不影响水面的压力分布，那么

为 $x>0$，
$$\zeta(x)=\frac{F}{\pi\rho c^2}\int_0^\infty\frac{te^{-tx}dt}{t^2+\nu^2}$$

为 $x<0$，
$$\zeta(x)=\frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{2\pi\sin\nu x+\int_0^\infty\frac{te^{-t|x|}dt}{t^2+\nu^2}\right\}$$

所以水面的形状是一个对称马鞍 ζ_1 和一个尾波 ζ_2 的叠加，如下图：



而波的幅是 $2F/\rho c^2$，所以阻力 R 是
$$R=\frac{1}{4}\left(\frac{2F}{\rho c^2}\right)^2\rho g=\boxed{\frac{F^2}{\rho c^4}g=R}$$

其实这一个结果也可以用另外一个看法来了解：F 是分布在 $x=0$ 左右的压力，水面在 $x=0$ 点左右如果对称或平坦，那都不会产生阻力。F 作用在水面上的力，也就是水作用在"F 力"上的反作用力（即阻力）是
$$\frac{F}{2}\left(\frac{d\zeta_2}{dx}\right)_{x=-0}=\frac{F}{2}\frac{F}{\pi\rho c^2}2\pi\frac{g}{c^2}=\frac{F^2}{\rho c^4}g=R$$

这结果是完全符合我们以上的计算的。

27

$\zeta'(x)$ 现在我们为了下面的计算，研究一下 $\frac{d\zeta}{dx}$ 的值。

为 $x>0$，也就是在F力之前，

$$\zeta'(x) = -\frac{F}{\pi\rho c^2}\int_0^\infty \frac{t^2 e^{-xt}dt}{t^2+\nu^2} = -\frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{\int_0^\infty e^{-xt}dt - \nu^2\int_0^\infty \frac{e^{-xt}dt}{t^2+\nu^2}\right\}$$

$$= -\frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{\frac{1}{x} - \nu\int_0^\infty \frac{e^{-\nu x\xi}d\xi}{\xi^2+1}\right\} = \frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{-\frac{1}{x} + \nu\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2+1} - \nu\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\nu x\xi})d\xi}{\xi^2+1}\right\}$$

也就是说

$$\zeta'(x) = \frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{-\frac{1}{x} + \frac{\pi\nu}{2} - \nu\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\nu x\xi})d\xi}{\xi^2+1}\right\}$$

为 $x<0$，也就是在F力之后

$$\zeta'(x) = \frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{2\pi\nu\cos\nu x + \int_0^\infty \frac{t^2 e^{xt}dt}{t^2+\nu^2}\right\}$$

$$= \frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{2\pi\nu\cos\nu x - \frac{1}{x} - \nu\int_0^\infty \frac{e^{\nu x\xi}d\xi}{\xi^2+1}\right\} = \frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{2\pi\nu\cos\nu x - \frac{1}{x} - \frac{\pi\nu}{2} + \nu\int_0^\infty \frac{(1-e^{\nu x\xi})d\xi}{\xi^2+1}\right\}$$

所以如果 $\nu = \frac{g}{c^2}$ 是很小的话，那么

为 $x>0$，$\qquad \zeta'(x) \cong \frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{-\frac{1}{x} + \frac{\pi\nu}{2}\cdots\right\}$

而当 $x<0$，$\qquad \zeta'(x) \cong \frac{F}{\pi\rho c^2}\left\{-\frac{1}{x} + \frac{3\pi\nu}{2}\cdots\right\}$

我们在下面将利用这个结果来计算在水面上以高速运行的平板上的压力分佈。

平板以仰角α运行的

如果在平板上的压力分佈是 $p-p_0 = f(\xi)$，$0<\xi<b$，那么如果略去二次 ν 项不计，

$$\pi\rho c^2\alpha = \int_0^b \frac{\pi\rho c^2}{F} f(\xi)\,\zeta'(x-\xi)\,d\xi = \int_0^b f(\xi)\left\{\frac{1}{\xi-x}\right\}d\xi + \int_0^x f(\xi)\frac{\pi\nu}{2}d\xi + \int_x^b f(\xi)\frac{3\pi\nu}{2}d\xi$$

因此设

$$f(\xi) = f^0(\xi) + \nu f'(\xi) + \cdots$$

那么
$$\pi\rho c^2\alpha = \int_0^b \frac{f^0(\xi)}{\xi - x}\,d\xi \qquad (I)$$
$$-\frac{\pi}{2}\int_0^x f^0(\xi)\,d\xi - \frac{3\pi}{2}\int_x^b f^0(\xi)\,d\xi = \int_0^b \frac{f^1(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \qquad (II)$$

- - - -

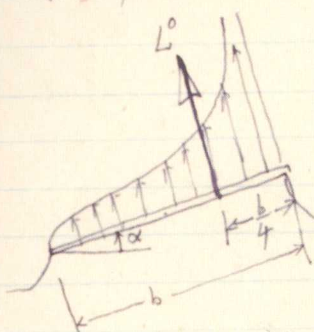
这也就是一连串的为 $f^0(\xi)$, $f^1(\xi)$ 等的积分方程。先解第一个(I)积分方程，求出 $f^0(\xi)$，然后再代入(II)，求 $f^1(\xi)$。

现在我们先来解第一个积分方程：如果我们代入新的变数 θ 和 ϕ，
$$\frac{b}{2}(1-\cos\theta) = \xi, \qquad d\xi = \frac{b}{2}\sin\theta\,d\theta$$
$$\frac{b}{2}(1-\cos\phi) = x$$
那么第一个积分方程可以换写作。
$$\pi\rho c^2\alpha = \int_0^\pi \frac{f^0\cdot\sin\theta\,d\theta}{\cos\phi - \cos\theta}$$
我们在这里可以利用二元翼剖面理论的经验，命
$$f^0 = A_0\tan\frac{\theta}{2}$$
那么
$$f^0\cdot\sin\theta = A_0\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = A_0(1-\cos\theta)$$
因此
$$\pi\rho c^2\alpha = A_0\int_0^\pi \frac{(1-\cos\theta)\,d\theta}{\cos\phi - \cos\theta} = A_0\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos\phi - \cos\theta} + A_0\int_0^\pi \frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta - \cos\phi}$$
但是我们知道
$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\phi} = \pi\frac{\sin n\phi}{\sin\phi},$$
所以
$$A_0 = \rho c\alpha$$
作为一级近似，我们得到
$$f^0(\xi) = \rho c^2\alpha\cdot\tan\frac{\theta}{2} = \rho c^2\alpha\sqrt{\frac{\xi/\frac{b}{2}}{2-\frac{\xi}{\frac{b}{2}}}} = \rho c^2\alpha\sqrt{\frac{\xi}{b-\xi}} = f^0(\xi)$$

我们也可以由这里求作用在平板上升力的一级近似 L^0：
$$L^0 = \int_0^b f^0(\xi)\,d\xi = \frac{b}{2}\rho c^2\alpha\int_0^\pi \tan\frac{\theta}{2}\cdot\sin\theta\,d\theta = \pi c^2\rho\alpha\frac{b}{2} = L^0$$
从这里我们知道，在水面滑行的平板，如果其仰角为 α，那么在一级近似中，它的升力系数是

$$C_L^0 = \frac{L^0}{\frac{\rho}{2}c^2 b} = \pi\alpha$$

这只有平板翼面的一半。我们可以从下面的观点来解释它：在水面滑行的平面只能在平板下面承受压力，而不象翼面那样既能在下表面承受压力，也能在上表面承受吸力。显然，就象翼平板面一样，压力中心是在离前缘 $b/4$ 的地方。



现在我們再来解第二个方程：

$$\int_0^b \frac{f'(\xi)\,d\xi}{x-\xi} = \frac{\pi}{2}\int_0^x f^0(\xi)\,d\xi + \frac{3\pi}{2}\int_x^b f^0(\xi)\,d\xi$$

把 x, ξ 变数換成 ϕ 及 θ，並代入以前所求得的 $f^0(\xi)$，这个方程就可以換写作

$$\int_0^\pi \frac{f'(\theta)\sin\theta\,d\theta}{\cos\theta-\cos\phi} = \frac{\pi}{2}\int_0^\phi \rho c^2\alpha\frac{b}{2}(1-\cos\theta)\,d\theta + \frac{3\pi}{2}\int_\phi^\pi \rho c^2\alpha\frac{b}{2}(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \rho c^2\alpha\frac{b}{2}\left[\frac{\pi}{2}\{\phi-\sin\phi\} + \frac{3\pi}{2}\{\pi-\phi+\sin\phi\}\right]$$

$$= \rho c^2\alpha\frac{b}{2}\left[\frac{3\pi^2}{2} - \pi\phi + \pi\sin\phi\right] = \frac{b}{2}\pi\rho c^2\alpha\left[\frac{3\pi}{2}-\phi+\sin\phi\right]$$

我們先得把 $\frac{b}{2}\pi\rho c^2\left[\frac{3\pi}{2}-\phi+\sin\phi\right]$ 展开为 $\cos n\phi$ 的级数，即

$$\frac{b}{2}\pi\rho c^2\alpha\left[\frac{3\pi}{2}-\phi+\sin\phi\right] = A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\phi$$

也就是说

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\frac{b}{2}\pi\rho c^2\alpha\int_0^\pi\left[\frac{3\pi}{2}-\phi+\sin\phi\right]d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{b}{2}\pi\rho c^2\alpha\left[\frac{3\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}+2\right] = \boxed{\frac{b}{2}\rho c^2(\pi^2+2)\alpha = A_0}$$

而

$$A_n = \frac{2}{\pi}\frac{b}{2}\alpha\pi\rho c^2(-1)\int_0^\pi\left[\frac{3\pi}{2}-\phi+\sin\phi\right]\cos n\phi\,d\phi = \frac{2}{\pi}\frac{b}{2}\pi\rho c^2\alpha\left[+\frac{1}{n^2}\{\cos n\phi + n\phi\sin n\phi\}\right]_0^\pi$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[\sin(n+1)\phi - \sin(n-1)\phi\right]d\phi\Big] = \boxed{b\rho c^2\left[+\frac{(-1)^n-1}{n^2} + \frac{1+(-1)^n}{n^2+1}\right]\alpha = A_n}$$

现在如果我们令

$$\pi f'(\theta) = -A_0\tan\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin n\theta$$

那么

$$\int_0^{\pi}\frac{f'(\theta)\sin\theta\,d\theta}{\cos\theta-\cos\phi}=-\frac{A_0}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta-\cos\phi}d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n\int_0^{\pi}\frac{\sin n\theta\sin\theta\,d\theta}{\cos\theta-\cos\phi}$$

$$=A_0-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos(n+1)\theta-\cos(n-1)\theta}{\cos\theta-\cos\phi}$$

$$=A_0-\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n\frac{1}{2}\frac{\sin(n+1)\phi-\sin(n-1)\phi}{\sin\phi}=A_0-\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n\cos n\phi$$

所以我们的解的确能满足第二个积分方程，而

$$f'(\theta)=\frac{1}{\pi}\left[-A_0\tan\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n\sin n\theta\right]$$

也就是说一直到二次近似，

$$f(\theta)=f^{0}(\theta)+\nu f'(\theta)。$$

因为

$$\int_0^{b}f'(\xi)d\xi=\frac{b}{2}\int_0^{\pi}f'(\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{b}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-A_0\tan\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n\sin n\theta\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{b}{2}(-A_0)+\frac{b}{2}\frac{A_1}{2}$$

所以一直到二次近似，我们有

$$L=\frac{1}{2}\rho c b^2\left[\pi\alpha-\nu\left\{b\left(\frac{\pi^2}{2}+1\right)+1\right\}\alpha\right]=\frac{\pi}{2}\rho c^2 b\left[1-\frac{gb}{c^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\right]\alpha$$

也可以用升力系数来表达，

$$C_L=\frac{L}{\frac{1}{2}\rho c^2 b}=\pi\alpha\left[1-\frac{gb}{c^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\right]$$

这一个结果说明引力 g 的作用是减小升力。

因为作用在平面上的压力始终是垂直于板面的，所以阻力一定是 α 乘升力。因此阻力 D 和阻力系数是

$$D=\alpha\cdot L=\frac{1}{2}\rho c^2 b\cdot\pi\left[1-\frac{gb}{c^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\right]\alpha^2$$

和

$$C_D=\frac{D}{\frac{1}{2}\rho c^2 b}=\pi\alpha^2\left[1-\frac{gb}{c^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\right]$$

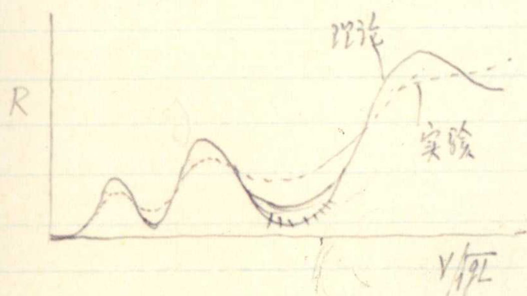
31

船舶造波阻力的计算：

我們在上面所表达的问题也是计算船舶造波阻力的示范。如果船身窄而深，那么我们近似地以在 Oxz 面上的源的分佈来代替船体。这些源所产生的速度势一定在自由面上产生一些速度，而这速度一定不能满足自由面的压力条件。于是我们引入另一个速度势 φ_2 来使得 $\varphi_1+\varphi_2$ 能满足自由面的条件。波阻是由 φ_2 而来的。我们计算的潜在水下的旋涡就是一个这类的简单例子。

如果船身平扁，那么我们用一个分佈在水面上的压力来代替船身。我们的滑行平板就是这一类的例子。

这样建立起来的理论是很有价值的，它能解释为什么波阻在速度增加时候有时增加，而有时又减少，但总的倾向是趋于增加（如图）。所以理论也还有缺点，那就是



1. 它给出阻力R的上下摆动太大，实验结果一般摆动较小。
2. 理论没有包括水的粘性影响，而这影响可能是两方面的：一方面形成另外一种阻力、摩擦阻力；必需附加到波阻上去，作为总的阻力。而另一方面有粘性就有边界层，而边界层可能使波在固体表面的反射力减弱，这一点我们所说的理论也没有能估计进去。有可能由于这样的边界层效应而使得船头波和船尾波的相互干扰减、或相互加强作用减弱了，这就有可能解释上面所说的(1)项误差。

32

195 年 月 日
中國科學院
力學研究所

第五讲

淺水中的長波

基本方程式

我们要在这一讲里讨论水流和波动的问题，我们將假设运动的特徵长度远远比水深大。也就是我们从另外一个方向来簡化问题：我们在以前的讨论里，作为簡化问题的假设是小干扰，也就是小的波高。而在这里，我们將解除这样的一个限制，我们將不限制波高，不说运动是小干扰；但是我们说水深总是比波长小得多。这样的情况下，我們將仍以 xoy 平面为无干扰的水平面，而水底的固体表面是

$$z=-h(x,y)$$

来代表的。在时间瞬间 t 的水面形状是

$$z=\zeta(x,y,t)$$

因此在时间 t 的水深是 $\zeta(x,y,t)+h(x,y)$。在这样的水深里，波的傳播（微弱波）速度是，如果引用以前的结果，

$$c=\sqrt{g(\zeta+h)}$$

我們現在来研究如何利用这一特殊情形来簡化我们的计算。一般的方程：

连续方程，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

运动方程，

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g.$$

5 10

无旋条件:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=0$$

在自由面上,我們一个压力条件

$$p-p_0=0$$

此外我們也有一个运动学的条件

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+v_x\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v_y\frac{\partial \zeta}{\partial y}-v_z=0$$

而在水底,我們的边界条件是无底面法向的速度,也就是说

$$v_x\frac{\partial h}{\partial x}+v_y\frac{\partial h}{\partial y}+v_z=0$$

我们簡化计算的方法是放弃研究在水深方向,也就是z向的细节,先研究z向总的,也就是z向的积分量。如果我們把连續方程在z向积分

$$\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial v_x}{\partial x}dz+\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial v_y}{\partial y}dz+\Big[v_z\Big]_{z=-h}^{z=\zeta}=0$$

也就是说

$$\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial v_x}{\partial x}dz+\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial v_y}{\partial y}dz+\left[\frac{\partial \zeta}{\partial t}+v_x\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v_y\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right]_{z=\zeta}+\left[v_x\frac{\partial h}{\partial x}+v_y\frac{\partial h}{\partial y}\right]_{z=-h}=0$$

但是

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}v_x\,dz=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial v_x}{\partial x}dz+\Big[v_x\Big]_{z=\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\Big[v_x\Big]_{z=-h}\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta}v_y\,dz=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial v_y}{\partial y}dz+\Big[v_y\Big]_{z=\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\Big[v_y\Big]_{z=-h}\frac{\partial h}{\partial y}$$

那么连續方程式就变成,

195 年 月 日
中國科學院力學研究所

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} v_x dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} v_y dz = -\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

一直到现在我们并没有引用什么简化的近似。现在我们说在浅水里，一切运动主要的是 v_x, v_y，而 v_z 是非常小的，那么在第三个运动方程式里，它的左面就可以略去不计，而

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$$

因而如果引用自由面的压力条件，那么

$$p - p_0 = g\rho(\zeta - z)$$

其他两个运动方程式也可以略去带有 v_z 的项，并引用上面的压力公式，

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

因为我们已经不考虑 v_x, v_y 随 z 的变化，连续方程也就可以换写作

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(\zeta+h)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v_y(\zeta+h)\right] = -\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

这就是为三个未知函数 v_x, v_y, ζ 的三个方程。求得了 ζ 我们就可以从压力公式求压力。很显然，现在的问题是非线性的了。

写作气动力学的形式

上面所得到的公式可以再经过一次变更而把它们变成和气动力学相似的形式：我们让每单位面积水表面上的质量为 $\bar{\rho}$，也就是

$$\bar{\rho} = \rho(\zeta+h)$$

而我们又引用在水深方面每单位长度的力 $\bar{p}$，也就是

$$\bar p = \int_{-h}^{\zeta} (p-p_0)\,dz$$

我们如果用以前已经得到的压力公式，那么

$$\bar p = \frac{\rho g}{2}(\zeta+h)^2 = \frac{g}{2\rho}\bar\rho^2$$

所以这个公式中，如果我们以 $\bar p$ 为"压力"，而 $\bar\rho$ 为密度，那么它就是一个等熵过程的方程式，而 $\kappa=2$。也就是我们的"气体"是一个 $\kappa=2$ 的气体。现在连续方程变成

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\bar\rho v_y) = -\rho\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

但是因为 h 不随时间 t 而变，

$$\rho\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \bar\rho}{\partial t}$$

所以连续方程成为

$$\frac{\partial \bar\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\bar\rho v_y) = 0$$

这就完全和气动力学中的连续方程一样了。

两个运动方程式也可以换写作

$$\bar\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\rho g(\zeta+h)\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial \bar p}{\partial x}+\bar\rho\frac{\partial h}{\partial x}g$$

$$\bar\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\rho g(\zeta+h)\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\partial \bar p}{\partial y}+\bar\rho\frac{\partial h}{\partial y}g$$

假!

如果 h 是一个常数，也就是说静水是等深的，那么 $\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial y}=0$，因而在"等深"水中，

$$\bar\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \bar p}{\partial x}$$

$$\bar\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \bar p}{\partial y}$$

而且

$$\frac{d\bar p}{d\bar\rho} = \frac{g}{\rho}\bar\rho = g(\zeta+h) = c^2$$

这也符合气动力学的规律。所以如果 $h=$常数，那么我们就可以说水面的运动与气体 $(\kappa=2)$ 的运动相似。

由于这种深水中运动学与气动力学问题的相似性，我们可以用一切用来解决二元气动力学的计算方法，把它全了应用到深水问题方面来。我们可以说如果 $v^2 < g(h+\zeta)$，那么我们有亚临界速度流（亚声速度），如果 $v^2 > g(h+\zeta)$，那么我们有超临界速度流。在每一个流型中，我们可以应用相应的亚声速或超声速方法。象特征线方法等。

自然，我们在分析具体的浅水问题中，也必需认识到我们的分析并没有考虑到液体的粘性，所以在上述的方法中并没有出现水底的边界层以及摩擦力。如果水深太小了，小到接近边界层的厚度，那就有问题了，那就不能用上面的方法。如果水不太浅，我们还能在我们的方程式中加入水底阻力来补正不足。

高速气流的水流模型

因为二元气动力学的问题有上述浅水流的模型，有许多超声速二元气动力学的问题就可以用水槽来作模拟实验。产生水流的办法是用泵把水打入水槽，水槽起始的一头有一个在宽度变化上形似Laval喷口的槽，从而得到超临界速度流。在此以后就是槽宽不改了。不过为了保持水流速度，槽底略下倾，以用重力来抵消槽底阻力。模型是一个柱形体。（为定常运动）

我们利用这一个模型是十分方便的，因为如果实验段的一般水深是5厘米，那么 $c=\sqrt{9.8\times0.05}=0.70$ 米/秒；就是 $M=4$ 的水流也不过 2.80 米/秒的流速，是很容易做到的。所以水槽模型是很有用的。但是我们也必需注意到下面的几个问题：

1. $\kappa=2$，而不是气体的 1.3–1.4；因此模似不很准。
2. 水深不能太浅，浅固可以因 c 小而减小流速，但边界层的影响太大。
3. 而水深了，长度必需加大，才能满足浅水假设的条件
4. 流型的细微变化是小尺寸的变化，浅水近似不够准。

5　　10

195　年　　月　　日　　　　中國科學院
力學研究所

所以总的说来，水槽模型只是气动力问题的定性实验，而不是定量的实验。

我們也看到，如果在水槽的模擬中，令 $\frac{\partial h}{\partial x}=0$，$\frac{\partial h}{\partial y}=-\gamma$，$\gamma$ 是重力常數，那么

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}-\bar{\rho}g$$

所以如果水槽的底不是平的，而是傾向 y-向傾下，坡度是一定，那就有了重力作用了。这是淺水模擬的又一应用。

特徵綫解法

現在把问题简化，只考虑一元运动，那么我们只有一个运动方程，只有一个分速度 $v=v_x$，

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

連續方程是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v(\zeta+h)\right]=-\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$c^2=g(\zeta+h)$$

因此

$$2c\frac{\partial c}{\partial x}=g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+g\frac{dh}{dx},\qquad 2c\frac{\partial c}{\partial t}=g\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

所以上面的运动方程就能換写作

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+2c\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{dH}{dx}=0,\qquad H=gh \tag{1}$$

而連續方程就成为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[vc^2\right]=-g\frac{\partial \zeta}{\partial t},\qquad 2vc\frac{\partial c}{\partial x}+c^2\frac{\partial v}{\partial x}+2c\frac{\partial c}{\partial t}=0$$

即

$$2\frac{\partial c}{\partial t}+2v\frac{\partial c}{\partial x}+c\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{2}$$

~~如果我们把(1)和(2)相加~~

~~$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(v+c)\frac{\partial}{\partial x}\right\}(v+2c$~~

195 年 月 日　　中國科學院 力學研究所

为了计算不太复杂，现在我们再假设 $\frac{\partial h}{\partial x}$ = 常數 = m，那么我们可以把(1)及(2)相加而得到

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(v+c)\frac{\partial}{\partial x}\right\}(v+2c-mt)=0$$

而如果把(1)及(2)相减，我们就得到

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(v-c)\frac{\partial}{\partial x}\right\}(v-2c-mt)=0$$

从这两个方程，我们看到如果有一条在 x,t 面上的曲线 C_1，在那上面

$$\frac{dx}{dt}=v+c \qquad C_1$$

那么在那上面，在 C_1，

$$v+2c-mt=k_1=\text{常數}$$

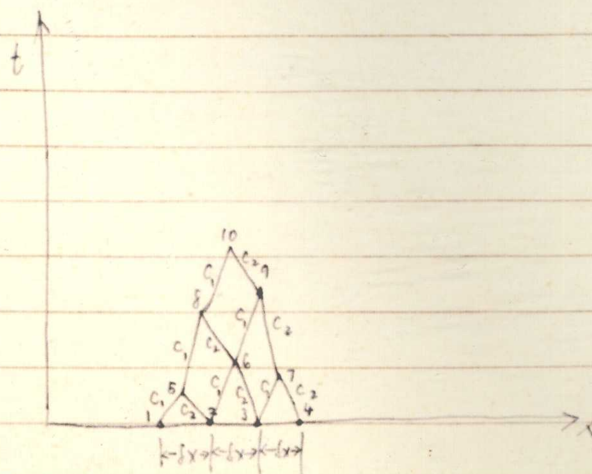
同样的，在 C_2 上，

$$\frac{dx}{dt}=v-c$$

$$v-2c-mt=k_2=\text{常數}$$

C_1，C_2 就是所谓特徵线。在 x,t 面上，我们有两组曲线，C_1 及 C_2，在每一条线上，k_1 及 k_2 都是常數。通过每一个在 x,t 上的点，都有一对 k_1，k_2 值，那么我们就能求出这点上的 v 及 c 的數值，也就是 v 及 ζ 的數值。这就是问题的解了。

那么怎么样才能求得 C_1，C_2 特徵线的网呢？我们在这一类问题里要研究的是初始条件问题：也就是说在 $t=0$ 的时候，给定了 v 和 ζ 的值。给了 ζ，从 $h(x)$ 就能求 c，所以沿着 x-轴，我们有 v 及 c 的數值。现在在 x-轴上取两个邻近的点，它们之间有一个小距离 δx。让这两点为 1，及 2。

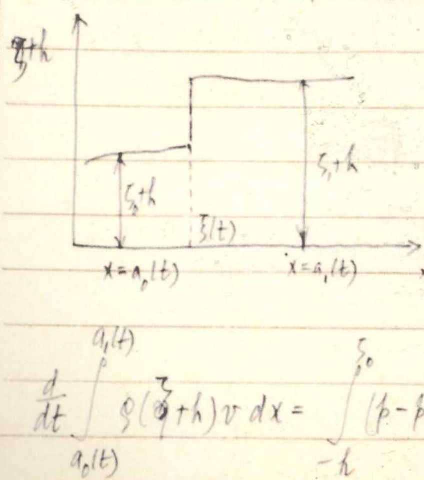


195 年 月 日　　　　中國科學院力學研究所

在1及2，因为v及c都是知道的，我们就可以求出 $v+2c-mt=k_1$ 和 $v-2c-mt=k_2$ 的值。要在1画出C_1，2画出C_2是有困难的，但是如果画出C_1或C_2的長度不大，C_1及C_2可以用直线来代替，C_1是$\frac{dx}{dt}=v+c$，即用1点的$v+c$，不考虑一小段C_1上v及c的变化。C_2是$\frac{dx}{dt}=v-c$，即用2点的$v-c$，不考虑一小段C_2上v及c的变化。就这样得到C_1及C_2的交点5，在5我们知道了mt，k_1，k_2，就能从新计算v及c在5点的數值。然后再在5从新画C_1及C_2。就这样逐步描出C_1及C_2的近似曲线，及各点的近似v及c數值。自然，当δx愈小，解也就愈准确。我们可以证明：当$\delta x\to 0$，解就趋近于正确解。在实际上，我们往往并不要过小的δx就能取得足够准确的解；只要求得的C_1及C_2比較平滑就行了。

水跃

我們所说的特徵綫方法要求两系C_1线或两系C_2线不相交，如果相交，那么在交点上$v+2c$或$v-2c$有两个數值，则就是说在这一点上，v，c有两二數值，这是物理所不允许的。这是什么毛病呢？其实在交点出现的瞬间以前，水流早已发生了不连续点，也就是v及c或ζ的跳跃，名为水跃。例如，任何一个波，波幅一大就会比較快地形成水跃。



我们取一个跟着水走的一对水断面 $x=a_0(t)$ 及 $x=a_1(t)$，它们之間包含了不连续断面 $\xi(t)$。那么连续方程及动量方程为

$$\frac{d}{dt}\int_{a_0(t)}^{a_1(t)}\rho(\zeta+h)\,dx=0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{a_0(t)}^{a_1(t)}\rho(\zeta+h)v\,dx=\int_{-h}^{\zeta_0}(p-p_0)_{x=a_0(t)}\,dz-\int_{-h}^{\zeta_1}(p-p_0)_{x=a_1(t)}\,dz=\frac{1}{2}g\rho(\zeta_0+h)^2-\frac{1}{2}g\rho(\zeta_1+h)^2$$

195 年 月 日 中國科學院 力學研究所

这里的积分形式都是

$$I = \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \psi(x,t)\,dx$$

而 $\psi(x,t)$ 在 $x=\xi(t)$ 有一个不连续点。积分的微分是

$$\frac{d}{dt}\int_{a_0(t)}^{a_1(t)}\psi(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_{a_0(t)}^{\xi(t)}\psi(x,t)\,dx + \frac{d}{dt}\int_{\xi(t)}^{a_1(t)}\psi(x,t)\,dx$$

$$= \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \frac{\partial\psi}{\partial t}dx + \psi(\xi_-,t)\dot{\xi}(t) - \psi(a_0(t),t)v_0 + \psi(a_1(t),t)v_1 - \psi(\xi_+,t)\dot{\xi}(t)$$

因为如果我们让 其中 $\dot{a}_0(t)=v_0$，$\dot{a}_1(t)=v_1$，$\dot{\xi}=\frac{d\xi}{dt}=$ 不连续面的速度。$\psi(\xi_-,t)$ 是在不连续面左面的 ψ 值，$\psi(\xi_+,t)$ 是在不连续面右面的值。如果我们让 $a_0(t)$ 及 $a_1(t)$ 趋近 $\xi(t)$，那么右方的积分趋近于零，而

$$\lim_{a_1\to a_0}\frac{dI}{dt} = \psi_1(v_1-\dot{\xi}) - \psi_0(v_0-\dot{\xi}) = \psi_1 u_1 - \psi_0 u_0$$

其中 ψ_1 是 ψ 在不连续面之右的值，ψ_0 是在不连续面之左的值。而

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - \dot{\xi} \\ u_0 = v_0 - \dot{\xi} \end{cases} \qquad (3)$$

我们利用这一个公式，就得到

$$\rho(\zeta_1+h)u_1 - \rho(\zeta_0+h)u_0 = 0 \qquad (4)$$

$$\rho(\zeta_1+h)u_1v_1 - \rho(\zeta_0+h)u_0v_0 = \frac{1}{2}\rho g(\zeta_0+h)^2 - \frac{1}{2}\rho g(\zeta_1+h)^2 \qquad (5)$$

如果给定了 v_0 及 $\dot{\xi}$，及 ζ_0，及 h；上面四个方程就能求出四个未知数 v_1, u_1, ζ_1, u_0 的值。我们也可以利用第一个方程来简化第二个方程，把它写成

$$\rho(\zeta_0+h)u_0(u_1-u_0) = \frac{1}{2}\rho g(\zeta_0+h)^2 - \frac{1}{2}\rho g(\zeta_1+h)^2 \qquad (6)$$

(4) 和 (6) 就是给定了 u_0 及 ζ_0 后的求 u_1 及 ζ_1 的两个方程。

(4) 和 (6) 也可以写作。

5 10

$$\bar{\rho}_1 u_1 = \bar{\rho}_0 u_0 = m, \qquad m(u_1-u_0) = \bar{P}_0 - \bar{P}_1 \qquad \text{——(17)}$$

m就是每单位通水跃长度的质量流量。第二个方程是说动量的增加是由于力的作用。

(16)式也可以写成

$$\rho(\zeta_0+h)u_0^2\left(1-\frac{u_1}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\rho g(\zeta_0+h)^2\left[\left(\frac{\zeta_1+h}{\zeta_0+h}\right)^2-1\right]$$

或用(4)式写作

$$u_0^2\left[1-\frac{\zeta_0+h}{\zeta_1+h}\right] = \frac{1}{2}c_0^2\left[\left(\frac{\zeta_1+h}{\zeta_0+h}\right)^2-1\right]$$

也就是

$$\left(\frac{\zeta_1+h}{\zeta_0+h}\right)^2+\left(\frac{\zeta_1+h}{\zeta_0+h}\right)-2\left(\frac{u_0}{c_0}\right)^2=0$$

所以

$$\frac{u_0}{u_1}=\left(\frac{\zeta_1+h}{\zeta_0+h}\right) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\left(\frac{u_0}{c_0}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_0}, \qquad \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_0}>1，如果\ \frac{u_0}{c_0}>1$$

如果 $\frac{u_0}{c_0}>1$，

因此在水跃后面的水高是总比水跃前面的水高大，也就是说诚然是"跃"。~~我们也看到不管 u_0/c_0 是什么数值，从零到很大都是可以发生水跃的。这就说与气体的流动不同，在气体流里，类似于水跃的激波只有在超声速流才能发生。~~但是到底 $\frac{u_0}{c_0}$ 是大于1还是小于1呢？我们还得研究水跃中能的变化。

现在我们来计算一下水跃中能的变化，我们现在只研究机械能 E 的变化：我们还是用以前的办法

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\int_{a_0(t)}^{a_1(t)}\left[\rho(\zeta+h)\frac{v^2}{2}+\frac{\rho g}{2}(\zeta+h)^2\right]dx\right\}+\int_{-h}^{\zeta_1}(p-p_0)\,v_1\,dz\Big|_{x=a_1(t)}-\int_{-h}^{\zeta_0}(p-p_0)\,v_0\,dz\Big|_{x=a_0(t)}$$

我们让 $a_0\to a_1$，

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}\bar{\rho}_1 v_1^2 u_1-\frac{1}{2}\bar{\rho}_0 v_0^2 u_0+\bar{P}_1 u_1-\bar{P}_0 u_0+\bar{P}_1 v_1-\bar{P}_0 v_0$$

$$=\frac{1}{2}m(v_1^2-v_0^2)+\bar{P}_1 u_1-\bar{P}_0 u_0+\bar{P}_1 v_1-\bar{P}_0 v_0$$

如果我们(17)式乘上 ξ，

$$m(u_1-u_0)\xi=\bar{P}_0 v_0-\bar{P}_0 u_0-\bar{P}_1 v_1+\bar{P}_1 u_1$$

把上面两个公式相减，我们得到 . . . . .

加　5　10

195 年 月 日

中國科學院力學研究所

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}m(v_1^2-v_0^2)-m(u_1-u_0)\dot{\xi}+2\bar{p}_1u_1-2\bar{p}_0u_0$$

$$=\frac{1}{2}m(u_1-u_0)(v_1+v_0)-\frac{m}{2}(u_1-u_0)(v_1-u_1)-\frac{m}{2}(u_1-u_0)(v_0-u_0)+2\bar{p}_1u_1-2\bar{p}_0u_0$$

$$=m\left[\frac{1}{2}(u_1^2-u_0^2)+2\left(\frac{\bar{p}_1}{\bar{\rho}_1}-\frac{\bar{p}_0}{\bar{\rho}_0}\right)\right]$$

但是

$$u_1=\frac{m}{\bar{\rho}_1},\quad u_0=\frac{m}{\bar{\rho}_0},\quad \bar{p}_1=\frac{g}{2\rho}\bar{\rho}_1^2,\quad \bar{p}_0=\frac{g}{2\rho}\bar{\rho}_0^2$$

所以

$$\frac{dE}{dt}=m\left[\frac{m^2}{2}\left(\frac{1}{\bar{\rho}_1^2}-\frac{1}{\bar{\rho}_0^2}\right)+\frac{g}{\rho}(\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_0)\right]$$

而由(1)

$$m^2=\frac{\bar{p}_0-\bar{p}_1}{\frac{1}{\bar{\rho}_1}-\frac{1}{\bar{\rho}_0}}=\frac{g}{2\rho}\frac{\bar{\rho}_0^2-\bar{\rho}_1^2}{\frac{1}{\bar{\rho}_1}-\frac{1}{\bar{\rho}_0}}$$

因而

$$\frac{dE}{dt}=\frac{mg}{\rho}\left[\frac{1}{4}(\bar{\rho}_0^2-\bar{\rho}_1^2)\left(\frac{1}{\bar{\rho}_1}+\frac{1}{\bar{\rho}_0}\right)+\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_0\right]=\frac{mg}{\rho}\frac{(\bar{\rho}_0-\bar{\rho}_1)^3}{4\bar{\rho}_1\bar{\rho}_0}$$

如果 $\bar{\rho}_1/\bar{\rho}_0>1$，经过水跃机械能是损失了，而损失了的机械能变成热了。这个过程可以通过水跃中的湍流来理解：水跃产生湍流，湍流运动由于粘性消耗的而变成热。如果 $\bar{\rho}_1/\bar{\rho}_0<1$，那么机械能将被产生出来，这就没有道理了，因此 $\bar{\rho}_1/\bar{\rho}_0>1$。那么照上面的公式 $\frac{u_0}{c_0}>1$，也就是说水跃前的水流必须是超临界速度的！

5 10

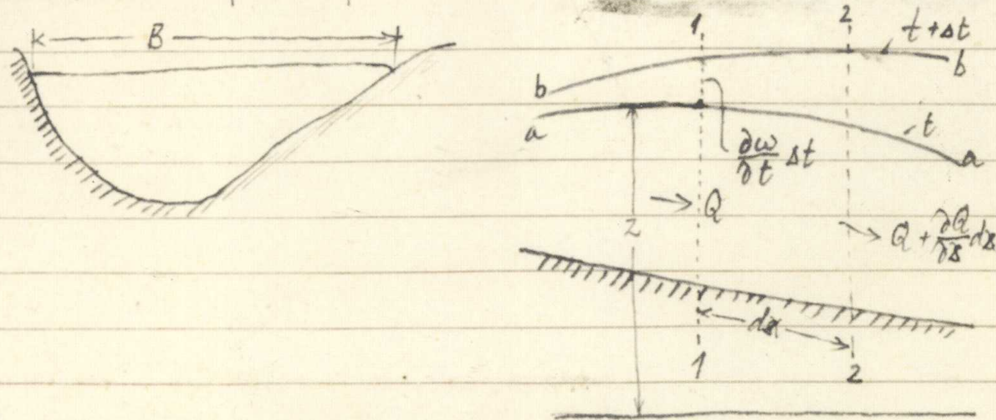
195　年　　月　　日　　中國科學院 力學研究所

第六讲

河道和明渠中的流动

我們先来建立计算河道和明渠中流动的一般基本方程：

如果在时间 t 瞬间，自由水面位置为 $a-a$，在 $t+\Delta t$ 时，位置是 $b-b$。在水流中取出断面 1-1 和 2-2 间的一段来考虑。这两个断面



相隔一个极小的距离 dx，现在来计算在时间 Δt 里这个流段中的流量的变化。设 Q 为流量，ω 为断面。

在时间 Δt 里，通过断面 1-1 流进所论流段的水量是 $Q\Delta t$，而流出的是 $(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx)\Delta t$，故净流入量为 $-\frac{\partial Q}{\partial x}dx\Delta t$。而水量在流段里的体积变化为 $\frac{\partial\omega}{\partial t}\Delta t\,dx$。所以连续方程式是（在流入的时候，我们假定它是没有速度的。）

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q$$

其中 q 就是单位时间里在单位河道长度中流入河道的水量（的体积），如果是渗透损耗，q 值是负的。

如果 V 是断面中的平均速度，那么 $Q=V\omega$；而且 $\frac{\partial\omega}{\partial t}=B\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$，$B$ 是 t 瞬间在 1-1 断面的顶宽，因而连续方程式也可以写作

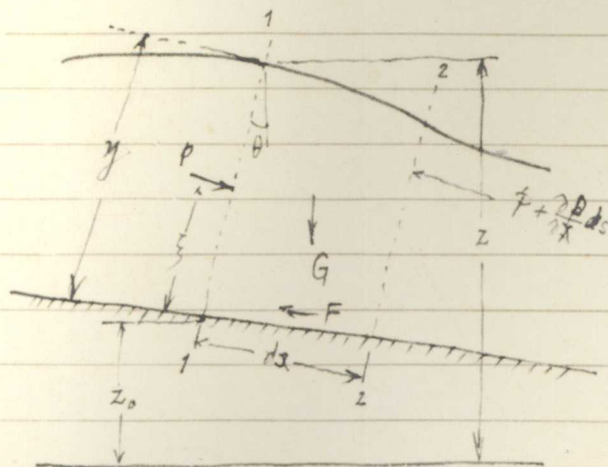
$$B\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial(\omega V)}{\partial x}=q \qquad (I)$$

在矩形河槽的情况下，$\omega=By$，这里 y 是水流深度。因此，在这个情况里，

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial(yV)}{\partial x}=q/B$$

5　　10

现在我们来研究运动方程式，设水流断面的宽度係由水深的某种



函数来决定，就是：

$$b = f(\xi)$$

ξ是沿着垂直于x轴的方向计标的，并在 $0 \le \xi \le y$ 的范围内变化，y为1-1面的水深。那么

$$\omega = \int_0^y f(\xi)\,d\xi$$

在断面1-1上的总的水压力P，如果用浅水的近似，

$$P = \rho g\cos\theta \int_0^y (y-\xi) f(\xi)\,d\xi$$

其中θ为河床线对水平的倾角。因为θ小，$\cos\theta \approx 1$，所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \int_0^y f(\xi)\,d\xi = \rho g \omega \frac{\partial y}{\partial x}$$

故在dx段上作用的合力是

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx = \rho g \cdot \omega \cdot \frac{\partial y}{\partial x}dx$$

摩阻力的计标是从定常流情况下，由实验或观察得来的，即

$$F = \tau\chi\,dx$$

而τ为剪力，χ为湿周。我们在引用定常流的资料时，我们的理由是：

195 年 月 日
中國科學院
力學研究所

河流中不定常流，如水深的加减，一般较慢，可比在水断面中的水流型的建立要慢，因此F在每一瞬间都可以作为是已经调整了的，即定常流的数值。

重力的x向分力是 $+\rho g\omega dx\cdot\sin\theta$

惯性力为 $\rho\omega dx\cdot\left[\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}\right]$。

所以

$$\rho\omega\left[\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}\right]=-\tau\chi+\rho g\omega\cdot\sin\theta-\rho g\omega\cdot\frac{\partial y}{\partial x}-q\cdot\rho V$$

也就是

$$\sin\theta-\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}\right\}-\frac{\tau}{\rho\omega g}\chi-\frac{qV}{\omega g}=0$$

这就是运动方程式了。

我们一般研究θ很小的情况，也就是 $\sin\theta\simeq\tan\theta=i$，所以运动方程式也可以写作是

$$\boxed{i-\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}\right\}+\frac{\tau\chi}{\rho\omega g}+\frac{qV}{\omega g}}\qquad(II)$$

当我们知道了水深时，我们就可以去求 $\tau\chi$ 及 ω（或B），所以连续方程(III)及运动方程是可以看为 y 及 V 的两个联立一次微分方程式。给定的是 i，及 q。

解这两个方程的最一般方法是用数值积分，尤其是用电子计算机来进行计算时尤有效，这样我们就可以用几十分钟的时间来预报十天的洪水或径流情况，是近代水利工作中很重要的一个工作。用数值积分也就是说我们用(II)及(III)两个方程，不加简化，也就是非线型的方程。另一个方法就是先把(II)及(III)两个方程从微干扰的角度来线型化，这样数学的分析就大大地简化，但是理论的有效应用只限于很小的小干扰，如水电站一日中负荷大小变化对下游水位的变化等问题。我们不打算在这里讨论这种线型微干扰理论，它在 Чертоусов 的"水力学专门教程"下册中有详细的描述，读者可以参看。我们在这里只讨论非线型的问题。

5 10 3

195 年 月 日

中國科學院
力學研究所

定常流、合流问题

我們先说一个非常简单的情况：那就是当不论河床的断面形状、流量、流速、及水深都不以时间及x而变，一切都是常数。在这样的情况下，q是零，而(II)给定 $\tau\chi/\rho\omega g = \tau/\rho R g$，R是"水力半径"($=\omega/\chi$)。这就是说 i 必需是常数，而水深、流速等都可以由这个方程求出。$\tau\chi$与流速及其它水力学因素的关系一般是用经验公式，也就是因为如此，所以公式有好多个，繁简不同。我们常用的有两个：一个是比较简单的 Chézy 公式

$$\tau\chi = \rho \frac{r^2 V^2}{R}\chi = \rho g\omega \frac{r^2 V^2 M}{gR}$$

其中 r^2 是无量纲的粗糙度系数。另一个常用的公式是 Manning 公式，

$$\tau\chi = \rho g\omega \frac{V^2 M}{\gamma R^{4/3}}$$

而 γ 是一个有量纲的粗糙度系数。

现在我们用 Manning 公式来研究在矩形河道床中的定常流，$q=0$。这样连续方程式是

$$\frac{d(yV)}{dx}=0, \qquad yV=D, \qquad V=\frac{D}{y}$$

而运动方程式就成为

$$g\left(i-\frac{dy}{dx}\right)=\frac{D}{y}\left(-\frac{D}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}+g\frac{D^2}{y^2}\frac{1}{\gamma\left\{\frac{y}{1+2y/B}\right\}^{4/3}}$$

也可以写作

$$\left(g-\frac{D^2}{y^3}\right)\frac{dy}{dx}+g\left\{\frac{D^2}{\gamma y^2\left\{\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right\}^{4/3}}-i\right\}=0$$

这首先表明了，如果

$$\frac{D^2}{\gamma i}=y^2\left\{\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right\}^{4/3}$$

而同时 $g\neq\frac{D^2}{y^3}$，(i=常数)那么水深就不因 x 而变，也就是平行的定常流。

什么时候 $g-\frac{D^2}{y^3}$ 会等于零呢？意得出来，就是说 $gy=V^2$，但是 $gy=c^2$，也就是说河道中的流速等于波速。在一般河道中，这是不会达到的，也就是说河道中的流速一般是亚临界速度的。

上面的方程式可以积分为，如果我们假设 i 是常数，

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{g-\frac{D^2}{y^3}}{\left\{i-\frac{D^2}{\gamma y^2\left\{\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right\}^{4/3}}\right\}}dy$$

当 $y=y_0$ 的时候，$x=0$。我们来研究一下，如果 $y=y^*+\varepsilon$ 的时候，x 当是什么？而 y^* 是平行的定常流的 y，也就是说

$$\frac{D^2}{\gamma i}=y^{*2}\left\{\frac{y^*}{1+\frac{2y^*}{B}}\right\}^{4/3}$$

我们有

$$dy=+d\varepsilon,$$

$$g-\frac{D^2}{y^3}=g-\frac{D^2}{(y^*+\varepsilon)^3}=g-\frac{D^2}{y^{*3}\left(1+\frac{\varepsilon}{y^*}\right)^3}=g-\frac{D^2}{y^{*3}}\left\{1-3\frac{\varepsilon}{y^*}\cdots\right\}=g-\frac{D^2}{y^{*3}}+3\frac{D^2\varepsilon}{y^{*4}}>0$$

而

$$\left[i-\frac{D^2}{\gamma y^2\left\{\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right\}^{4/3}}\right]^{-1}=i^{-1}\left[1-\frac{D^2}{\gamma i y^{*2}\left(1+\frac{\varepsilon}{y^*}\right)^2\left\{\frac{(y^*+\varepsilon)}{1+\frac{2(y^*+\varepsilon)}{B}}\right\}^{4/3}}\right]^{-1}$$

$$=i^{-1}\left[1-\frac{\left(\frac{y^*}{1+\frac{2y^*}{B}}\right)^{4/3}}{\left(1+\frac{\varepsilon}{y^*}\right)^2\left\{\frac{y^*\left(1+\frac{\varepsilon}{y^*}\right)}{1+\frac{2y^*\left(1+\frac{\varepsilon}{y^*}\right)}{B}}\right\}^{4/3}}\right]^{-1}=i^{-1}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{y^*}\right)^2\left\{\frac{1+\frac{\varepsilon}{y^*}}{1+\frac{2}{B\left(1+\frac{2y^*}{B}\right)}\varepsilon}\right\}^{4/3}}\right]^{-1}$$

$$=i^{-1}\left[1-\left(1-2\frac{\varepsilon}{y^*}\cdots\right)\left(1-\frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{y^*}\cdots\right)\left(1+\frac{8}{3}\frac{1}{B\left(1+\frac{2y^*}{B}\right)}\varepsilon\cdots\right)\right]$$

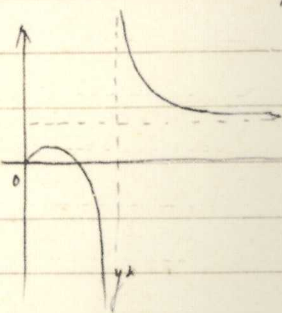
$$=i^{-1}\left[2\frac{1}{y^*}+\frac{4}{3}\frac{1}{y^*}-\frac{8}{3}\frac{1}{B+2y^*}\right]^{-1}\frac{1}{\varepsilon}=i^{-1}\left[\frac{10}{3}\frac{1}{y^*}-\frac{8}{3}\frac{1}{B+2y^*}\right]^{-1}\frac{1}{\varepsilon}$$

因为 $B>0$，$i>0$，所以 . . . . .

1 9 5 年 月 日
中國科學院
力學研究所

$$x - x_{y=y^*} = C\int^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}d\varepsilon = C\ln\varepsilon$$

如果我们设 C 为一个正的常数，那么在 $y = y^*$ 附近，上式里的积分子是 C/ε 的形式。这就是说无论我们从 y 小于 y^*（ε 为负）或从 y 大于 y^*（ε 为正），而逐渐趋近于 y^*，x 都趋向 $-\infty$。



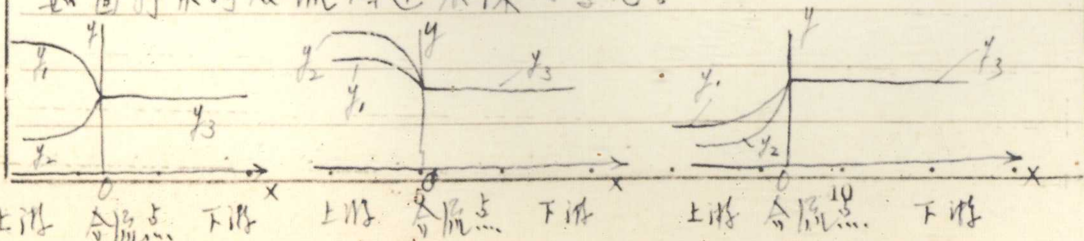
这就是说沿着流向来说，河道中的水深只能从 y^* 走向 $y \neq y^*$，而不能从 $y \neq y^*$ 走向 y^*。

这一个重要的结论是用 Manning 的公式具体演算得来的，但其实问题的中心不是阻力公式而是在河床中，如果我们在一定流量下，增加水深 y，$\tau\chi/\rho\omega g$ 是加大了还是减小了？如果叫 Λ 为

$$\Lambda = i - \frac{\tau\chi}{\rho\omega g}$$

在一定 D 之下，由于 y^* 的增加，Λ 是正的，还是负的。我们可以看得出来，在一定 D 之下，y 增加则 V 减，故 $\tau\chi$ 是减小了；但 y 加则 ω 加大，所以如果 y 从 y^* 增加，Λ 是正的，而且如果 $y = y^* + \varepsilon$，$\Lambda = C\varepsilon$，C 为正常数。所以我们看到前面的结论是带有一般性的。

我们从这一个结论得到有关两支流合成一股主流，即合流问题的定性解答：因为两支流在汇合点一定要有同一水深，但两支流的 y^* 一般不一样，叫做是 y_1^*，y_2^*。而合流点的 y^* 即 y_3^* 也不见得等于 y_1^* 或 y_2^*。我们上面的分析既不许 y_3（在合流后）变化，那么只有 y_1 及 y_2 变化的一个可能。也就是说如图所示的合流附近水深的变化。



6

195 年 月 日 中國科學院 力學研究所

~~径流~~ 洪峯，不定常流

我們还是研究矩形河道中的不定常流，$q=0$：连续方程为

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial (yV)}{\partial x}=0$$

运动方程为：

$$g\left(i-\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\tau X}{\rho w}$$

而如果我们用 Manning 公式，那么

$$\frac{\tau X}{\rho w}=g\frac{V|V|}{\gamma\left(\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right)^{4/3}}$$

所以运动方程是

$$g\left[i-\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{V|V|}{\gamma\left(\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right)^{4/3}}\right]=\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}$$

现在我们设不定常流为一个以 U 速度向 x-向进行的波，即 y 及 V 是 $\zeta=x-Ut$ 的函数而不是单独的 x 及 t 的函数。那么

$$\frac{\partial}{\partial t}=-U\frac{d}{d\zeta}；\quad\frac{\partial}{\partial x}=\frac{d}{d\zeta}$$

所以连续方程为

$$(V-U)\frac{dy}{d\zeta}+y\frac{dV}{d\zeta}=0，\text{或}\quad\frac{d}{d\zeta}[y(V-U)]=0$$

而运动方程是

$$g\left[i-\frac{V|V|}{\gamma\left(\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right)^{4/3}}\right]=g\frac{dy}{d\zeta}+V\frac{dV}{d\zeta}-U\frac{dV}{d\zeta}=g\frac{dy}{d\zeta}+(V-U)\frac{dV}{d\zeta}$$

我们从连续方程得到

$$y(V-U)=Q,$$

因而

$$V-U=\frac{Q}{y},\quad\therefore\quad V=\frac{Q}{y}+U$$

$$\frac{dV}{d\zeta}=-\frac{Q}{y^2}\frac{dy}{d\zeta}$$

所以运动方程便可以写作

$$\left(g-\frac{Q^2}{y^3}\right)\frac{dy}{d\zeta}=g\left[i-\frac{\left(\frac{Q}{y}+U\right)\left|\frac{Q}{y}+U\right|}{\gamma\left(\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right)^{4/3}}\right]$$

5 10

7

195 年 月 日

中國科學院
力學研究所

因而我们可以把积分写作

$$\zeta=\frac{1}{g}\int_{y^*}^{y}\frac{\left\{g-\frac{\mathcal{D}^2}{\eta^3}\right\}d\eta}{i-\frac{\left(\frac{\mathcal{D}}{\eta}+U\right)\left|\frac{\mathcal{D}}{\eta}+U\right|}{\gamma\left(\frac{\eta}{1+\frac{2\eta}{B}}\right)^{4/3}}}=\frac{1}{g}\int_{y^*}^{y}\frac{\left(g-\frac{\mathcal{D}^2}{\eta^3}\right)d\eta}{i-\frac{(\mathcal{D}+U\eta)|\mathcal{D}+U\eta|}{\gamma\eta^2\left(\frac{\eta}{1+\frac{2\eta}{B}}\right)^{4/3}}}=\frac{1}{g}\int_{y^*}^{y}Z(\eta)\,d\eta$$

在 $y=y^*$ 时，$\zeta=0$。

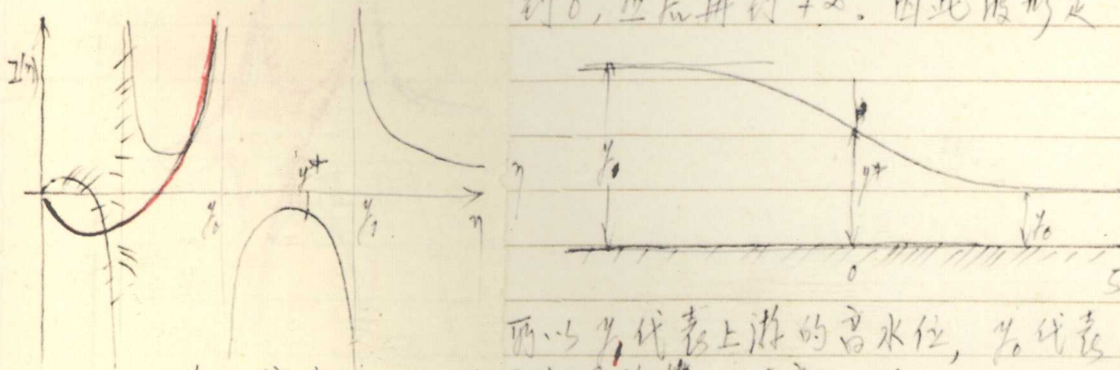
我们研究积分子的情况：$g-\frac{\mathcal{D}^2}{\eta^3}$ 在实际出现的水深中，一般是不会等于零的，如果是零，那就是说

$$(V-U)^2=g\eta$$

也就是说 V 是大于临界速度，这一般不会出现。如果分母等于零，我们如果把积分子计算出来，我们会发现如下面的情况：可見得当 η 从 y_1 逐渐减到 y_0，ζ 从 $-\infty$ 到 0，然后再到 $+\infty$。因此波形是

（旁注：我们由具体计算知道而且总是负的，）

（左侧批注：在 y_0 和 y_1 的地方积分子的分母等于零，因而积分趋向 ∞。但在这时候 $\mathcal{D}+U\eta>0$）



所以 y_1 代表上游的高水位，y_0 代表下游的低水位，而 U 代表涌流锋的速度。y_0 及 y_1 可以由下列两个条件决定

$$(\mathcal{D}+Uy_0)^2=i\gamma y_0^2\left(\frac{y_0}{1+\frac{2y_0}{B}}\right)^{4/3}$$

$$(\mathcal{D}+Uy_1)^2=i\gamma y_1^2\left(\frac{y_1}{1+\frac{2y_1}{B}}\right)^{4/3}$$

但是 $\mathcal{D}+Uy=Vy-Uy+Uy=Vy=D$，$\mathcal{D}=D-Uy$

而 D 是单位河宽的流量。所以如果我们给定了下游的流量

195 年 月 日
中國科學院
力學研究所

~~这两个方程可以代~~

y_1及y_0，那么我们为是给定了y_0及y_1，去求σ和u的方程。其实我们很容易求出

（因为$\sigma+uy_1$或$\sigma+uy_0$都必需大于0，不然的话根号上的分母不会等于零）

$$u = \frac{\sqrt{iV}}{y_1 - y_0}\left\{y_1\left(\frac{y_1}{1+\frac{2y_1}{B}}\right)^{2/3} - y_0\left(\frac{y_0}{1+\frac{2y_0}{B}}\right)^{2/3}\right\}$$

这是一个很重要的结果：因为i一般很小，所以计算出来的锋速u比浅水波的速度要小得多。一般u只有波速的几分之一。也就是说由于河床的阻力作用，涌流锋不能以浅水波的速度进行，而是大大地减慢了。但是我们也知道σ是负的，也就是说u一定大于V，即锋速也大于流速。

特徵线法

在矩形河道中的两个基本方程是：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + V\frac{\partial y}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} = g\left[i - \frac{V|V|}{\gamma\left(\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right)^{4/3}}\right]$$

但是$gy = c^2$，c是浅水波的速度，那么

$$c\frac{\partial V}{\partial x} + 2V\frac{\partial c}{\partial x} + 2\frac{\partial c}{\partial t} = 0$$

$$2c\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = g\left[i - \frac{V|V|}{\gamma\left(\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right)^{4/3}}\right]$$

把这两个方程加起来，我们得到

$$2\left\{(c+V)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right\}c + \left\{(c+V)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right\}V = g\left[i - \frac{V|V|}{\gamma\left(\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right)^{4/3}}\right] = E$$

把这两个方程相减，

$$-2\left\{(-c+V)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right\}c + \left\{(-c+V)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right\}V = g\left[i - \frac{V|V|}{\gamma\left(\frac{y}{1+\frac{2y}{B}}\right)^{4/3}}\right] = E$$

这也就是说 $V+2c$ 沿着 $\frac{dx}{dt} = V+c$ 线的变化率是E；而$V-2c$沿着$\frac{dx}{dt} = V-c$ 线的变化率是E。所以知道了初始情况，我们利用$\frac{dx}{dt} = V+c$线，即C_1特徵线和$\frac{dx}{dt} = V-c$，即C_2特徵线的图

5　　10

9

来进行逐步的數值积分。这就是特征线法。但在具体计算里，我们必需注意到一般强流锋的进行速度是比浅水波小得多，有一大段浅水波已经走过的地方水深增加很小。因此在计算过程必需作适当的修改。仔细的地方可以参看专门讨论这类问题的书。这个方法特别在研究两个支流汇合时，由于一个支流有洪流所引起的另一支流涨水问题中有用。

（如 B.A. Архангелский 的"河渠中不稳定流动的计算"）

10

195 年 月 日

中國科學院力學研究所

第七讲

空泡、空蚀现象

在研究液体的运动中，我們也不能够忘掉液体在一定条件下是可以变成气体的。就是液体及气体之間有一定的轉換条件，这个轉換的条件是一定温度下的物質汽压。如果液体的压力高于汽压，那么液体是稳定的，它不会变成蒸汽；如果液体的压力低于汽压，那么液体是不稳定的，它会从液体变成蒸汽。这个汽压随着温度的升高而加大。就以水为例，在室温下，这个压力很小，在15°C时是0.0169个大气压。但在100°C时，因为是水的沸点，汽压就是一个大气压了。

那么我們就要問：当液体在运动中，如果有一部分的静压力因速度的增加，照Bernoulli定理降低到相应于液温的汽压时，什么现象会发生？我們知道在流动中，最低的压力，也就是最高速度往往出现于固体的表面，我们的观察发现在表面压力降至汽压时，液体里面发生许多气泡，这些气泡在低压区的前端发生，順着一般液体下流。如果低压区很小，气泡从新进入高压区以后，也就是当气泡周圍压力上升到汽压以上之后，气泡又以很快的速度收缩而消灭。在外貌上看，表面上的低压区有一片白沫，而白沫实际上是由千百个不断发生而又消灭的小气泡所组成的。白沫就是空泡现象。

所以看来如果低压区不大，那么空泡区也不大，它对液体的流动，以至固体表面所受的力的影响应当不大。事实也确是如此的。但这並不等于说我们就可以忽略小区的空泡现象。问题在于气泡的不断发生和不断消灭，尤其是在消灭的时候，它能产生局部点上的很大压力，也就是说，小泡消灭时，就产生一个小而猛的向固体表面的打击。因为这种小气泡非常多，固体表面上就受到许许多多的打击，因而很快地产生材料的疲

5 10

11

195　年　月　日　　　　中國科學院 力學研究所

劳。从而表面材料被破坏了。例如前几年丰满水电站的水轮机就因为这样在低负载荷下运转而产生的空蚀，每年水轮都要进行一次修理。这是很不上算的。解决这个问题的办法，一方面自然是寻找能抵抗空蚀的材料。而一方面是改进流体动力学的设计，不让局部的流速过高，不让静压力低于汽压，这样汽泡就不会出现，空蚀也就没有了。

因为空蚀的出现不出现，是以汽压为定的，一个物体在水流速度为U的水流中，如果远处的静压力是p_0，而汽压是p_v，那么

$$\sigma = \frac{p_0-p_v}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

就是一个标志空蚀的无量纲数，名为空泡系数。如果$\sigma=0$，那就是说就是没有物体，光是水流也将沸腾了，这自然是一个下限。一般$\sigma>0$。如果物体表面在没有空泡时的最低压力是p^*，其相应的压力系数是

$$C_p^* = \frac{p^*-p_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

一般$p^*<p_0$，所以$C_p^*<0$。所以如果$\sigma>-C_p^*$，那么$p^*>p_v$，因而空泡不会出现，而空蚀也不会发生。所以一切有空蚀可能的水力机械，应该力求$\sigma^*=-C_p^*$的值小，这样一般$\sigma>\sigma^*$，就能免去空蚀。

从这么一说，水力机械对空蚀的要求是降低$-C_p^*$，而同时保持其他的要求。这其实是一个纯流体动力问题，是完全能以空气为实验介质的模型来解决的。所以虽说空蚀是液体流动所特有的现象，空蚀设计却可以用空气模型来研究，空气试验方法有设备上的许多方便。

局部的空蚀

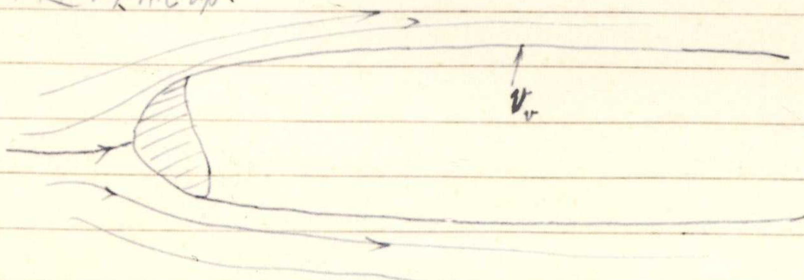
当$\sigma<\sigma^*$的时候，气泡区开始出现，这时候水流的情

195 年 月 日　　中國科學院 力學研究所

况与没有空泡时有所不同，因为空泡区侵占了一部分空间，使流型有所变改。这时候流型往往是不稳定的，有摆拍的声响。在理论的流型计算上，我们也还没有处理的好方法。

完全的空泡情况

这一般是指 $0<\sigma<1$ 这段情况下，空泡大大地发展了，它包上了物体的后一整半，一直拖到物体后面很长的地方。自然物体后面的空泡终于要消灭，因为离开了物体很远的空泡是不稳定的。但是既然空泡拖得很长，我们就可以为简化计算起见，把空泡作为无穷长，成了不连续流动：



其中 v_v 是相当于 p_v 的流速。因为

$$p_0+\frac{1}{2}\rho U^2 = p_v+\frac{1}{2}\rho v_v^2,\qquad \frac{v_v^2}{U^2}=\frac{\frac{1}{2}\rho v_v^2}{\frac{1}{2}\rho U^2}=\frac{(p_0-p_v)+\frac{1}{2}\rho U^2}{\frac{1}{2}\rho U^2}=1+\sigma$$

另段！如果物体前面的驻点不因 σ 的改变而移动的话，那么我们可以设想物体前面流速的分布主要是以 v_v 为定的，每一点的流速是 $v_v\cdot f(s)$，$f(s)$ 是沿表面的函数。那么物体受的合力是 $p-p_v$ 在前部表面的向量积分。因而是 $\frac{1}{2}\rho v_v^2[1-f^2(s)]$ 的向量积分。很明显：$[1-f^2(s)]$ 在物体前面的积分是 $\sigma=0$ 时候的，也就是 $v_v=U$ 时候的升力系数 $C_L(0)$ 和阻力系数 $C_D(0)$。所以

$$L=\frac{1}{2}\rho v_v^2 A C_L(0),\qquad D=\frac{1}{2}\rho v_v^2 A C_D(0)$$

其中 A 是物体的一个标准断面。因为

$$C_L=L/\tfrac{1}{2}\rho U^2A,\qquad C_D=D/\tfrac{1}{2}\rho U^2A$$

5　　10　　13

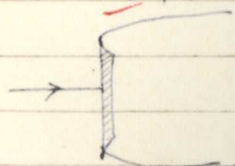
195 年 月 日　　中國科學院 力學研究所

所以

$$C_L(\sigma)= \frac{v_0^2}{u^2} C_L(0) = (1+\sigma) C_L(0)$$

$$C_D(\sigma)= \frac{v_0^2}{u^2} C_D(0) = (1+\sigma) C_D(0)$$

这两个公式很简单，它能表示在不同σ之下，完全空泡情况下的升力以及阻力系数，只要知道在 $u=v_0$ ($\sigma=0$) 时的系数就行了。而 $u=v_0$ 时的流型正是流体力学中不连续(经典)流所计算的结果，(见柯钦书第六章) 因此我们一下子就能解决问题。例如垂直放置的二维平板，(无限长板条)，$C_D(0)=\frac{2\pi}{4+\pi}$，$C_L(0)=0$，所以



由我们的公式

$$C_D(\sigma) = \frac{2\pi(1+\sigma)}{4+\pi}, \quad C_L(\sigma)=0 \qquad \text{(I)}$$

同样地，如果平板（二维的）不是正面迎放置的，而是有一个迎冲角α，那么

$$C_D(\sigma) = \frac{2\pi\sin^2\alpha}{4+\pi\sin\alpha}(1+\sigma); \quad C_L(\sigma)=\frac{\pi\sin2\alpha}{4+\pi\sin\alpha}(1+\sigma) \qquad \text{(II)}$$

但是我们必需清楚地认识到，我们的公式只是近似公式，它是根据一个流型不因σ而变的那么一个假定，实际上是不可能要求流型完全不因σ而变的。我们知道(I)是还比较准，在 $0<\sigma<1$，最大误差是5%；而(II)式只有当α接近于$\frac{\pi}{2}$弧度时才比较准。

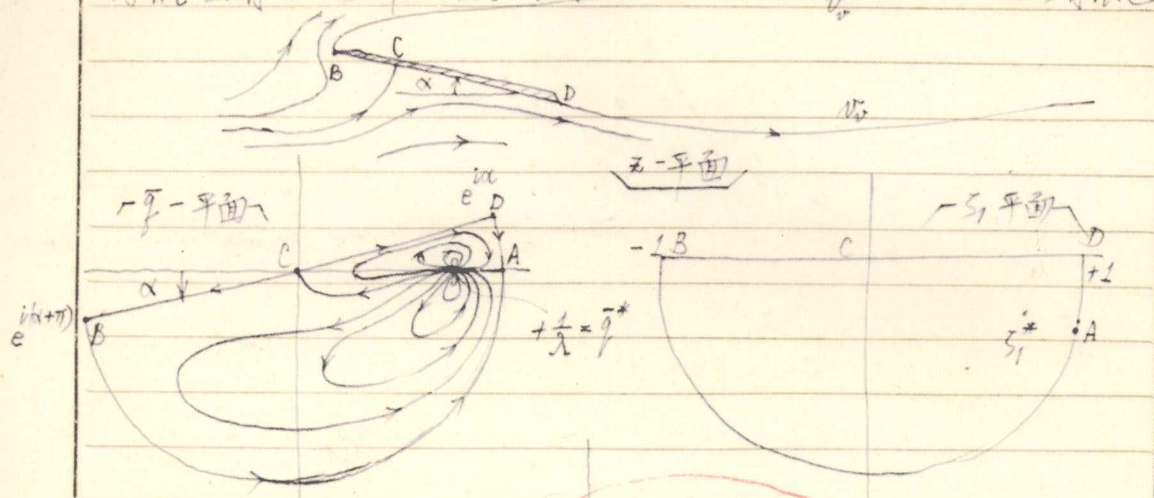
我们为什么要研究完全气泡情况下的流体力学呢？这是因为在某些工程技术问题里，完全气泡情况真地出现，如水翼船的水翼。研究水翼船理论就得搞完全气泡的流型。我们在下一节仔细研究一下二维平板翼的问题，作为这类问题的典型，学习处理的方法。

在无穷远的地方，速度将是 u

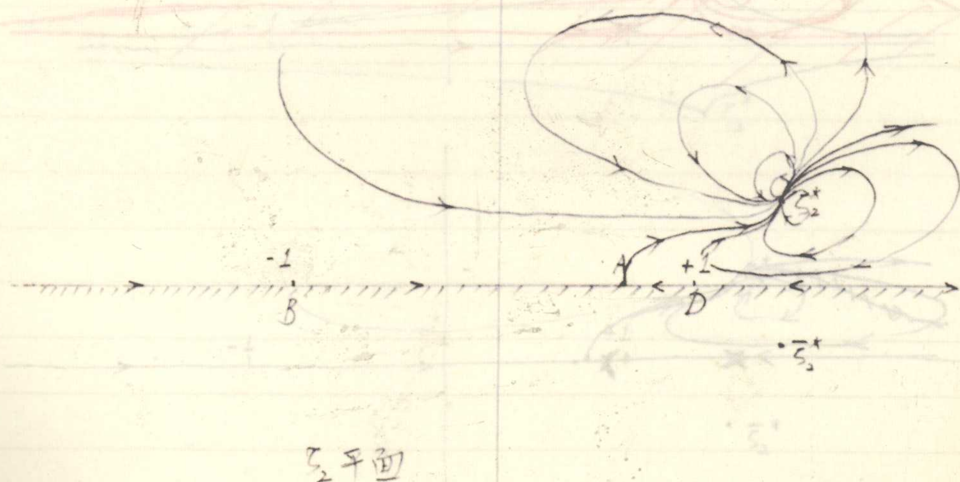
195　年　月　日　　中國科學院力學研究所

完全空泡中的平板

我們要研究的問題是一个以攻角 α 在均匀流速 u 中的平板，它的背面完全是空泡。在空泡里的压力是汽压 p_v，其相应流速是 u_v，$u_v \geq u$。我們让 ζ 代表 $u-iv/u_v$，那么在 z 平面及 ζ 平面中的流型有如下列两图。我們注意到二条 u_v 速度的流线不能在有限区



处相聚合，因为那样一来，平板及空泡合而成为一个"物体"。而依照流体力学的一般定理，这物体不受任何阻力，从而平板本身也不受阻力，这是不合理的。



5　　10

195 年 月 日 中國科學院 力學研究所

另段！我們先首要把ζ平面中的扁形放平，ζ_1平面就是这样一个平面。

$$\zeta_1 = e^{-i\alpha}\zeta$$

我們然后再把ζ_1平面中的扁型打开，令半圆变成整个ζ_2平面的上半平面。即

$$\zeta_2 = \frac{1}{2}\left(\zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1}\right)$$

現在我們要找在ζ平面的奇点，复势函数W，轉換到ζ_2平面后把点

因為 $\bar{\zeta} = \frac{1}{\lambda}$，$\lambda \geq 1$，$\zeta_1^* = \frac{1}{\lambda}e^{-i\alpha}$，$\zeta_2^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda}(\cos\alpha - i\sin\alpha) + \lambda(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]$

即

$$\boxed{\zeta_2^* = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\cos\alpha + i\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\sin\alpha}$$

我們也要把W函数中偶极子的軸向在ζ_2一平面中固定下来。要先这个方向，我们就要先$d\zeta_2/d\zeta$的角，即

$$d\zeta_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\zeta_1^2}\right)\frac{d\zeta_1}{d\zeta}d\zeta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\zeta_1^2}\right)e^{-i\alpha}d\zeta$$

在$\zeta_1 = \zeta_1^*$时，$\frac{d\zeta_2}{d\zeta} = \frac{1}{2}\left(1 - \lambda^2 e^{2i\alpha}\right)e^{-i\alpha} = -\frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)\cos\alpha - i\frac{1}{2}(\lambda^2 + 1)\sin\alpha$

在ζ一平面中，偶极子的軸向角是0，所以在ζ_2一平面偶极子的軸向是$\beta + \pi$，而

$$\boxed{\beta = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\sin\alpha}{\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\cos\alpha}\right]}$$

有了这些资料，同时致虑到复势函数W在ζ_2一平面的实数軸上必需是纯实的，以便实軸為流线$\psi = 0$；因此設C為未知常数，

$$W = C\left[\frac{e^{i(\beta+\pi)}}{\zeta_2 - \zeta_2^*} + \frac{e^{-i(\beta+\pi)}}{\zeta_2 - \bar{\zeta}_2^*}\right]$$

即

$$W = -C\left[\frac{e^{i\beta}}{\frac{1}{2}\left(\zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1}\right) - \zeta_2^*} + \frac{e^{-i\beta}}{\frac{1}{2}\left(\zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1}\right) - \bar{\zeta}_2^*}\right]$$

也就是

$$\boxed{W = -2C\left[\frac{e^{i\beta}\zeta}{e^{-i\alpha}\zeta^2 - 2\zeta_2^*\zeta + e^{i\alpha}} + \frac{e^{-i\beta}\zeta}{e^{-i\alpha}\zeta^2 - 2\bar{\zeta}_2^*\zeta + e^{i\alpha}}\right]}$$

5 10

16

195 年 月 日 中國科學院 力學研究所

有了 w 函數，我們就可以來求 z 的值，也就因此定下 c 的值。因為

$$\frac{dw}{dz}=u-iv=v_v\,\bar{q}$$

所以

$$dz=\frac{1}{v_v}\frac{dw}{d\bar{q}}\frac{d\bar{q}}{\bar{q}}$$

$$=-\frac{2c}{v_v}\left[\frac{e^{i\beta}}{\bar{q}\left(e^{-i\alpha}\bar{q}^2-2\zeta_2^*\bar{q}+e^{i\alpha}\right)}-\frac{e^{i\beta}\left(2e^{-i\alpha}\bar{q}-2\zeta_2^*\right)}{\left(e^{-i\alpha}\bar{q}^2-2\zeta_2^*\bar{q}+e^{i\alpha}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-i\beta}}{\bar{q}\left(e^{-i\alpha}\bar{q}^2-2\bar{\zeta}_2^*\bar{q}+e^{i\alpha}\right)}-\frac{e^{-i\beta}\left(2e^{-i\alpha}\bar{q}-2\bar{\zeta}_2^*\right)}{\left(e^{-i\alpha}\bar{q}^2-2\bar{\zeta}_2^*\bar{q}+e^{i\alpha}\right)^2}\right]d\bar{q}$$

如果平板的寬度是 b，我們把 dz 從 $\bar{q}=t'e^{+i\alpha}$，$t'=-1$，積分到 $t'=0$，再以 $\bar{q}=te^{+i\alpha}$，$t=+0$，積分到 $t=+1$，那么我們得到的就是 $be^{-i\alpha}$。所以

$$b=-\frac{2c}{v_v}\left[e^{i\beta}\int_{-1}^{0}\frac{dt'}{t'\left(t'^2-2\zeta_2^*t'+1\right)}+e^{i\beta}\int_{0}^{1}\frac{dt}{t\left(t^2-2\zeta_2^*t+1\right)}\right.$$

$$+e^{-i\beta}\int_{-1}^{0}\frac{dt'}{t'\left(t'^2-2\bar{\zeta}_2^*t'+1\right)}+e^{-i\beta}\int_{0}^{1}\frac{dt}{t\left(t^2-2\bar{\zeta}_2^*t+1\right)}$$

$$\left.+e^{i\beta}\left[\frac{1}{\left(t'^2-2\zeta_2^*t'+1\right)}\right]_{t'=-1}^{t'=0}+e^{i\beta}\left\{\frac{1}{t^2-2\zeta_2^*t+1}\right\}_{t=0}^{t=1}+e^{-i\beta}\left\{\frac{1}{\left(t'^2-2\bar{\zeta}_2^*t'+1\right)}\right\}_{t'=-1}^{t'=0}+e^{-i\beta}\left\{\frac{1}{t^2-2\bar{\zeta}_2^*t+1}\right\}_{t=0}^{t=1}\right]$$

也就是說

$$b=-\frac{2c}{v_v}\left[e^{i\beta}\cdot 4\zeta_2^*\int_0^1\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2-4\left(\zeta_2^*\right)^2t^2}+e^{-i\beta}\cdot 4\bar{\zeta}_2^*\int_0^1\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2-4\left(\bar{\zeta}_2^*\right)^2t^2}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{i\beta}}{2}\left\{\frac{1}{1-\zeta_2^*}-\frac{1}{1+\zeta_2^*}\right\}+\frac{e^{-i\beta}}{2}\left\{\frac{1}{1-\bar{\zeta}_2^*}-\frac{1}{1+\bar{\zeta}_2^*}\right\}\right]$$

我們現在再來求作用在平板上的力。$p-p_v=\frac{1}{2}\rho v_v^2-\frac{1}{2}\rho|u-iv|^2$，故 $p-p_v=\frac{1}{2}\rho v_v^2\left[1-\bar{q}q\right]$。但是 $p-p_v$ 正是作用在平板前后面上压力差，所以总力 P，作用于垂直于板面的方向將是

17

$$P = \frac{1}{2}\rho v_0^2 b\Big[1 + \frac{2C}{b v_0}\Big\{ e^{i\beta}\int_{-1}^{0}\frac{t'^2\,dt'}{t'(t'^2-2\zeta_2^* t'+1)} + e^{i\beta}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{t(t^2-2\zeta_2^* t+1)} + e^{-i\beta}\int_{-1}^{0}\frac{t'^2\,dt'}{t'(t'^2-2\bar\zeta_2^* t'+1)}$$

$$+ e^{-i\beta}\int_0^1\frac{t^2\,dt}{t(t^2-2\bar\zeta_2^* t+1)} - e^{i\beta}\int_{-1}^{0}\frac{t'^2(2t'-2\zeta_2^*)\,dt'}{(t'^2-2\zeta_2^* t'+1)^2} - e^{i\beta}\int_0^1\frac{t^2(2t-2\zeta_2^*)\,dt}{(t^2-2\zeta_2^* t+1)^2}$$

$$- e^{-i\beta}\int_{-1}^{0}\frac{t'^2(2t'-2\bar\zeta_2^*)\,dt'}{(t'^2-2\bar\zeta_2^* t'+1)^2} - e^{-i\beta}\int_0^1\frac{t^2(2t-2\bar\zeta_2^*)\,dt}{(t^2-2\bar\zeta_2^* t+1)^2}\Big\}\Big]$$

也就是说

$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 b} = 1 + \frac{2C}{b v_0}\Big[e^{i\beta}4\zeta_2^*\int_0^1\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2-4(\zeta_2^*)^2t^2} + e^{-i\beta}4\bar\zeta_2^*\int_0^1\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2-4(\bar\zeta_2^*)^2t^2}$$

$$+ \frac{e^{i\beta}}{2}\Big\{\frac{1}{1-\zeta_2^*} - \frac{1}{1+\zeta_2^*}\Big\} - e^{i\beta}8\zeta_2^*\int_0^1\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2-4(\zeta_2^*)^2t^2}$$

$$+ \frac{e^{-i\beta}}{2}\Big\{\frac{1}{1-\bar\zeta_2^*} - \frac{1}{1+\bar\zeta_2^*}\Big\} - e^{-i\beta}8\bar\zeta_2^*\int_0^1\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2-4(\bar\zeta_2^*)^2t^2}\Big]$$

因此

$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 b} = 1 + \frac{2C}{b v_0}\Big[\frac{e^{i\beta}}{2}\Big\{\frac{1}{1-\zeta_2^*} - \frac{1}{1+\zeta_2^*}\Big\} - e^{i\beta}4\zeta_2^*\int_0^1\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2-4(\zeta_2^*)^2t^2}$$

$$+ \frac{e^{-i\beta}}{2}\Big\{\frac{1}{1-\bar\zeta_2^*} - \frac{1}{1+\bar\zeta_2^*}\Big\} - e^{-i\beta}4\bar\zeta_2^*\int_0^1\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2-4(\bar\zeta_2^*)^2t^2}\Big]$$

这一些结果，经过更进一步的具体计算，就能得出数值解。因为计算比较繁，我们不在这里多说了。

正迎水流的平板

如果我们让 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，那么 $\zeta_2^* = i\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{2}$；$\bar\zeta_2^* = -i\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{2}$；$\beta = \frac{\pi}{2}$，$e^{i\beta} = i$，$e^{-i\beta} = -i$；那么一切计算都简化得多了。我們得到

$$b = +\frac{2C}{v_0}\Big[4\Big(\lambda-\frac{1}{\lambda}\Big)\int_0^1\frac{dt}{(t^2+1)^2+(\lambda-\frac{1}{\lambda})^2t^2} + \Big(\lambda-\frac{1}{\lambda}\Big)\frac{1}{1+\frac{(\lambda-\frac{1}{\lambda})^2}{4}}\Big]$$

$$= \frac{8C}{v_0}\Big[\Big(\lambda-\frac{1}{\lambda}\Big)\int_0^1\frac{dt}{t^4+(\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2})t^2+1} + \frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{(\lambda+\frac{1}{\lambda})^2}\Big] = \frac{8C}{v_0}\Big[\frac{1}{\lambda+\frac{1}{\lambda}}\Big\{\lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\Big\} + \frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{(\lambda+\frac{1}{\lambda})^2}\Big]$$

18

中國科學院力學研究所

而
$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 b} = 1 - \frac{2C}{bv_0}\left[\frac{4(\lambda-\frac{1}{\lambda})}{(\lambda+\frac{1}{\lambda})^2} - 4\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{t^4+(\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2})t^2+1}\right]$$
$$= 1 - \frac{8C}{bv_0}\left[\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{(\lambda+\frac{1}{\lambda})^2} - \frac{1}{\lambda+\frac{1}{\lambda}}\left\{\lambda\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}(\lambda)\right\}\right]$$

所以
$$\frac{8C}{bv_0} = \frac{\lambda+\frac{1}{\lambda}}{\frac{(\lambda-\frac{1}{\lambda})}{(\lambda+\frac{1}{\lambda})} + \lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

因此我們可以求出P的值為
$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^2 b} = \lambda^2\left[1 - \frac{\frac{(\lambda-\frac{1}{\lambda})}{(\lambda+\frac{1}{\lambda})} - \lambda\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}(\lambda)}{\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{\lambda+\frac{1}{\lambda}} + \lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}\right]$$

也就是
$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^2 b} = \lambda^2\frac{(\lambda-\frac{1}{\lambda})\left[\tan^{-1}(\lambda) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]}{\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{\lambda+\frac{1}{\lambda}} + \lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda^2\,\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\lambda+\frac{1}{\lambda}} + \frac{\lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda-\frac{1}{\lambda}}}$$

因為 $\lambda^2 = 1+\sigma$, 所以 $\lambda = (1+\sigma)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{8}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^3 + \cdots$

因此
$$\tan^{-1}(\lambda) = \tan^{-1}\left\{1+\left(\tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{8}\sigma^2 + \tfrac{1}{16}\sigma^3\right)\right\} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{8}\sigma^2 + \tfrac{1}{16}\sigma^3\cdots\right) - \frac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{8}\sigma^2\cdots\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\tfrac{1}{2}\sigma\right)^3\cdots$$
$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \cot^{-1}\left\{1+\left(\tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{8}\sigma^2 + \tfrac{1}{16}\sigma^3\cdots\right)\right\} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{8}\sigma^2 + \tfrac{1}{16}\sigma^3\right) + \frac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{8}\sigma^2\cdots\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\tfrac{1}{2}\sigma\right)^3\cdots$$

$$\frac{\lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda-\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}\left[\tan^{-1}(\lambda) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]}{\lambda-\frac{1}{\lambda}} = \tan^{-1}(\lambda) + \frac{\tan^{-1}(\lambda) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda^2-1}$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sigma - \frac{1}{8}\sigma^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sigma + \frac{7}{48}\sigma^2 \cdots$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{48}\sigma^2\cdots$$

$$\frac{1}{\lambda+\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1} = \frac{1+\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{8}\sigma^2\cdots}{2+\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\sigma^2 + \cdots$$

19

中國科學院力學研究所

所以我們終于得到下列结果：

$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^2 b} = (1+\sigma)\frac{\frac{\pi}{2}}{\left(1+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{24}\sigma^2} = (1+\sigma)\frac{2\pi}{(4+\pi)-\frac{1}{6}\sigma^2\cdots} = \frac{2\pi}{(4+\pi)}(1+\sigma)\frac{1}{1-\frac{1}{6(4+\pi)}\sigma^2\cdots}$$

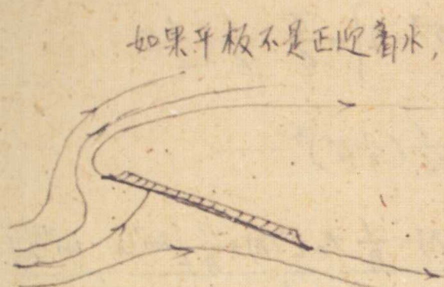
也就是

$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^2 b} = \frac{2\pi}{4+\pi}\left\{1+\sigma+\frac{1}{6(4+\pi)}\sigma^2\cdots\right\} = C_D(0)\left\{1+\sigma+\frac{1}{6(4+\pi)}\sigma^2\cdots\right\}$$

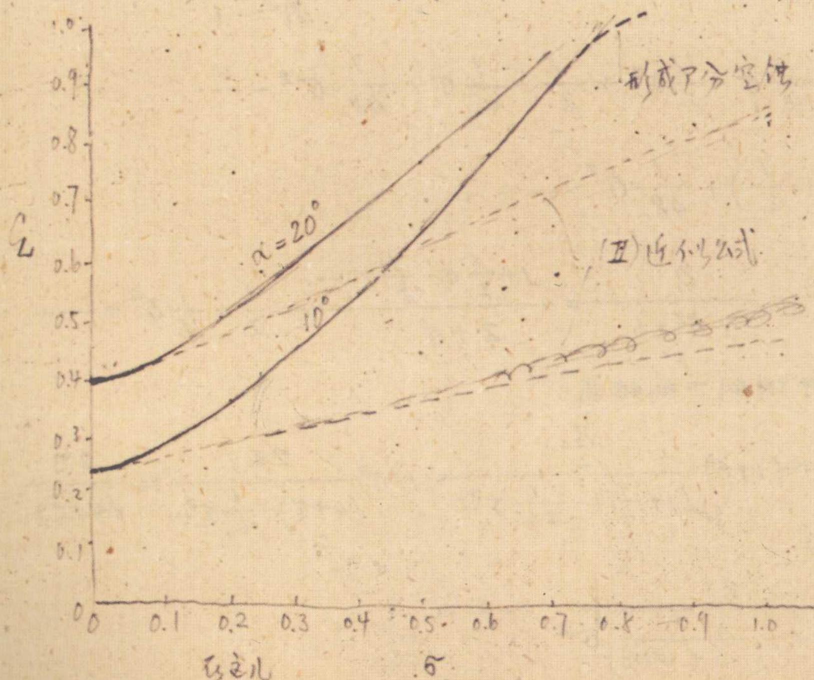
这结果说明，我们正像以前所论证，我们的近似公式(Ⅱ)是很准的，就是在 $\sigma=1$ 的时候，(Ⅱ)式的误差也不过 1.2%。

20

如果平板不是正迎着水，而是具有一定的迎角α（如图），那么近似公式就不那么准确。精确的解是可以计算得出来的，但是分析比较复杂，而且基本上所用的保角变换同教书上用的一样，



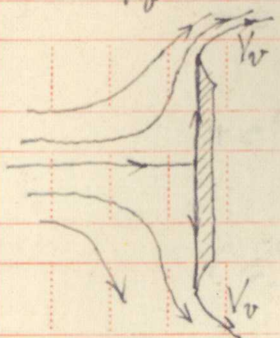
所以我们不在这里讲了。我们只把计算的结果在这儿表明（见图）

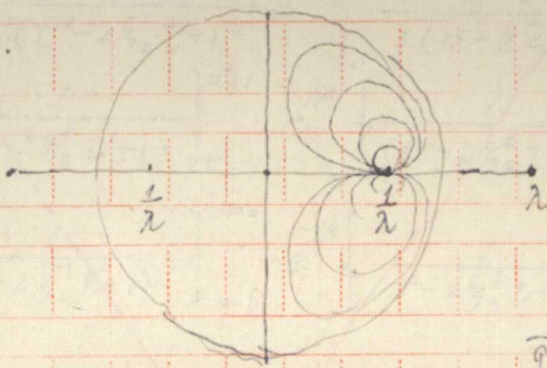


我们看到（II）公式在这儿是很不准的，而尤其σ又小时为然。实验结果完全证实了精确的理论计算，与图中实线符合。只不过当σ很大的时候，空泡形成不那么大，只有部分空泡；情况有所变更，自然用完全空泡的理论来计算C_L是不够恰当的，结果又有所变更了。

正面迎水的平板

我们现在讲一个比较简单的计算：研究平板正面迎水运动的问题。我们看到z-平面的流型如果映射到速度平面 $\zeta=\frac{u-iv}{V_0}$ 上去就形成四个偶极子的流型。我们注意到单位





圆应该是一条流线，而且虚轴也应该是一条流线。因此我们依照偶极子的流型规律就可以马上写下复速势 $W=\varphi+i\psi$ 函数为

$$W=C\left\{-\frac{\frac{1}{\lambda}}{\zeta-\frac{1}{\lambda}}+\frac{\lambda}{\zeta-\lambda}+\frac{\frac{1}{\lambda}}{\zeta+\frac{1}{\lambda}}-\frac{\lambda}{\zeta+\lambda}\right\}$$

我们现在可以试一下，单位圆 $\zeta=e^{i\theta}$，θ 为实数，是不是零流线。那也就是说代入 $\zeta=e^{i\theta}$，不管 θ 是什么，W 是不是实数？有，

$$W=C\left\{-\frac{\frac{1}{\lambda}}{(\cos\theta-\frac{1}{\lambda})+i\sin\theta}+\frac{\lambda}{(\cos\theta-\lambda)+i\sin\theta}+\frac{\frac{1}{\lambda}}{(\cos\theta+\frac{1}{\lambda})+i\sin\theta}-\frac{\lambda}{(\cos\theta+\lambda)+i\sin\theta}\right\}$$

$$=-C\left\{\frac{(\lambda-\frac{1}{\lambda})}{2\cos\theta-(\lambda+\frac{1}{\lambda})}+\frac{(\lambda-\frac{1}{\lambda})}{2\cos\theta+(\lambda+\frac{1}{\lambda})}\right\}$$

这证明单位圆是流线。我们也可以证明虚轴也是零流线。

有了W就可以积分了，因为

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = V_v\bar{\zeta}，\text{所以}\quad dz = \frac{1}{V_v}\frac{dW}{d\zeta}\frac{1}{\bar{\zeta}}d\zeta$$

因此

$$dz = \frac{C}{V_v}\left\{\frac{\frac{1}{\lambda}}{\left(\zeta-\frac{1}{\lambda}\right)^2} - \frac{\lambda}{(\zeta-\lambda)^2} - \frac{\frac{1}{\lambda}}{\left(\zeta+\frac{1}{\lambda}\right)^2} + \frac{\lambda}{(\zeta+\lambda)^2}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{4C}{V_v}\left\{\frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\left(\zeta^2-\frac{1}{\lambda^2}\right)^2} - \frac{\lambda^2}{(\zeta^2-\lambda^2)^2}\right\}d\zeta$$

如果我们用b来代表平板的宽度，那么ζ的积分应该从i到i0；从i0到i(-1)

$$ib = \frac{4C}{V_v}\left\{\frac{1}{\lambda^2}\left[\int_1^0 \frac{i\,dt}{\left(t^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)^2} + \int_0^{-1}\frac{i\,dt}{\left(t^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)^2}\right] - \lambda^2\left[\int_1^0\frac{i\,dt}{(t^2+\lambda^2)^2} + \int_0^{-1}\frac{i\,dt}{(t^2+\lambda^2)^2}\right]\right\}$$

$$b = \frac{4C}{V_v}\left\{-2\lambda^2\int_0^1\frac{dt}{(t^2+\lambda^2)^2} + 2\frac{1}{\lambda^2}\int_0^1\frac{dt}{\left(t^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)^2}\right\}$$

但是

$$2\lambda^2\int_0^1\frac{dt}{(t^2+\lambda^2)^2} = 2\int_0^1\frac{t^2+\lambda^2-t^2}{(t^2+\lambda^2)^2}dt = 2\int_0^1\frac{dt}{(t^2+\lambda^2)} - \int_0^1\frac{t\cdot d(t^2)}{(t^2+\lambda^2)^2}$$

$$= 2\int_0^1\frac{dt}{(t^2+\lambda^2)} + \frac{1}{(\lambda^2+1)} - \int_0^1\frac{dt}{(t^2+\lambda^2)} = \frac{1}{\lambda^2+1} + \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

因此

$$\frac{bV_v}{4C} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda^2}+1} + \lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2+1} - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} + \lambda\tan^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

我们现在再来求作用在平板上的力。$p - p_v = \frac{1}{2}\rho V_v^2 - \frac{1}{2}\rho|u-iv|^2$

所以 $p - p_v = \frac{1}{2}\rho V_v^2\{1 - \bar{\zeta}\cdot\zeta\}$。但是 $p-p_v$ 正是作用在平板前后面上的压力差，所以总力P，作用于垂直于板面方向的力，是

$$P=\frac{1}{2}\rho V_v^2 b\left[1-\frac{4Ci}{bV_v}\left\{\lambda^2\int_1^{0}\frac{t^2 i\,dt}{(t^2+\lambda^2)^2}+\lambda^2\int_0^{-1}\frac{i t^2 dt}{(t^2+\lambda^2)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\int_1^{0}\frac{i t^2 dt}{(t^2+\frac{1}{\lambda^2})^2}-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{-1}\frac{i t^2 dt}{(t^2+\frac{1}{\lambda^2})^2}\right\}\right]$$

或是写作

$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho V_v^2 b}=1-\frac{4C}{bV_v}\left[\frac{2}{\lambda^2}\int_0^1\frac{t^2 dt}{(t^2+\frac{1}{\lambda^2})^2}-2\lambda^2\int_0^1\frac{t^2 dt}{(t^2+\lambda^2)^2}\right]$$

但是 $$2\lambda^2\int_0^1\frac{t^2 dt}{(t^2+\lambda^2)^2}=\lambda^2\int_0^1\frac{t\cdot d(t^2)}{(t^2+\lambda^2)^2}$$

$$=\lambda^2\left[-\frac{1}{1+\lambda^2}+\int_0^1\frac{dt}{t^2+\lambda^2}\right]=\lambda\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

所以 $$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho V_v^2 b}=1-\frac{4C}{bV_v}\left[\frac{1}{\lambda}\tan^{-1}(\lambda)-\frac{1}{\lambda^2+1}-\lambda\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right]$$

$$=1-\frac{4C}{bV_v}\left[\frac{1}{\lambda}\tan^{-1}(\lambda)-\lambda\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right]$$

也就是说

$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^2 b}=\lambda^2\frac{\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\tan^{-1}(\lambda)+\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}+\lambda\tan^{-1}(\lambda)-\frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

所以 $$\boxed{\frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^2 b}=\frac{\lambda^2\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\lambda+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\lambda\tan^{-1}(\lambda)-\frac{1}{\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda-\frac{1}{\lambda}}}}$$ $\left(\tan^{-1}(\lambda)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{\pi}{2}\right)$

查

第八讲　非线性自由面及交界面问题

基本方程式。我們知道，如果把液体的粘性略去不计，那么而且我們依照运动发生的具体情况，认运动为无旋的，那么就有一个速度势 $\phi(x,y,z;t)$，它满足拉氏方程

$$\nabla^2\phi=0$$

而且由它可以求得速度 u, v, w 为

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

从运动方程式我们也可以求出计算压力 p 的公式：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{p}{\rho}-V=\text{常数}$$

此中 ρ 为液体的密度，V 为外力的势。如果外力只是由引力而生，并且 g 为引力常数，作用在 y 方向，那么

$$V=-gy$$

所以计算压力的公式就成为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{p}{\rho}+gy=\text{常数}$$

在许多具体问题里，如对固体的绕流，或是在固定面之间的

流动，边界条件只是说流速不能在垂直于表面的方向上有分速度，也就是说φ在表面法向不能有梯度，即 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0$（$n$是表面法向的座标）。那么拉氏方程加上这样的条件就形成一个完全为线型的问题，在一般情况下，求解并不十分困难。流体力学的大多数经典的问题是属于这一类的。

自由面问题

如果液体的运动中有一个自由面，液体处在自由面的下方，而上方是大气。那么由于大气的密度远远小于液体的密度，大气的压力可以任为是不变的，那么在自由面上的各个压力也应该是不变的。也就是说，在自由面上，p是常数。这样一来，在自由面上的边界条件是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]+gz=\text{常数}$$

显然，这样一个关系是非线型的，这本身已经给求解带来了困难。可是困难还不止于非线型的边界条件，我们在解这问题之前，就连边界（也就是自由面）在什么地方也不清知道。

我们在以前的讲述中，也谈到自由面的问题，我们还在那时

度都引入了一些简化的论据，把问题的复杂性减低了。例如当表面波的波幅很小的时候，那么~~速度以及分速度~~速度以及分速度也都会很小。从而速度的平方就成为二次小量，因此边界条件里的非线型项就可以略去不计；这么一来边界条件也就线型化了。

但是如果表面波的波幅不太小，~~或是问题根本不能~~即所谓有限波幅表面波问题，那么我们最多只有利用随着波前进的座标来把问题变为定常问题。也就是说边界条件成为

在自由面： $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\}+gy=$ 常数

问题也不能再进一步简化了：如果波动是三维的，因为我们不能象在线型问题那样用叠加法把多个二维波加成三维波。

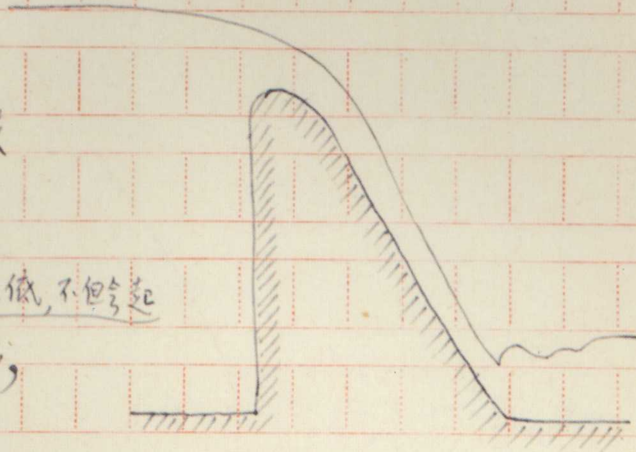
如果问题真是二维的，那么边界条件自然就更进一步简化为，在自由面： $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\}+gy=$ 常数

而控制方程也就是二维的，即

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

在固定面上，边界条件为 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$

这一类问题里的一个重要问题是溢洪道的设计问题。如图所示，我们的问题是怎么样来设计溢洪道的形状，以预防表面过低压力的出现，如果压力太低，不但会起真空化，而且也有危险使空气从侧面侵入溢洪道，使水流离开坝面；但一旦离开表面，真低压又消失了，水流会从新粘附表面。这样就造成一种不稳定的流动，而水流的跳动引起强烈的振动，会造成破坏。而且实际上坝面水流因为流速大，还会发生掺气现象。以前因为边界条件是非线型的，因此计算方法不容易得到准确的结果，一般要用实验方法来解决。所以如果发生掺气现象，那么因为我们直到现在对掺气还没有搞清楚，其中模型相似律的问题也没有完全解决，所以模型实验还有一定的困难。



第 4 页

为了避免予先不知道自由面所在的困难，我们可以选用 $W=\varphi+i\psi$ 为自变量，也就是用 φ 为横座标，用 ψ 为竖座标。我们以 $\omega=\theta+i\ln q$ 为未知量，θ 为速度矢量与 x-軸间的角度，q 是速度的绝对值。我们知道如果 $z=x+iy$，$\frac{dW}{dz}=u-iv$ 而 $\omega=i\ln(u-iv)$，所以从复变函数的理论，我们知道 ω 也是 W 的函数；因此我们选择的变数是恰当的。

由于我们选择了 W 为自变数，自由面就可以认为是 W-平面的实数轴，即 φ 轴；而流场是在 φ 轴的下面。这样一来，在 φ 轴上的边界条件就成为

$$\frac{1}{2}e^{2\tau}+gy=\text{常数}$$

如果我们把上式对自由面的流线方向 s 微分，那么

$$e^{2\tau}\frac{\partial\tau}{\partial s}+g\frac{\partial y}{\partial s}=0$$

但是 $\frac{\partial y}{\partial s}=\sin\theta$，而 $\frac{\partial\tau}{\partial s}=\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}q=\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}e^{\tau}$

因此自由面的边界条件可以写作是

当 $\psi=0$，$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\varphi}(e^{3\tau})=-g\sin\theta$，在实轴上。

如果我们是研究以c速度沿x-轴方向传播的波，那当没有波的时候水深是h，那么当$\psi=ch$，

$$\theta=0,\qquad \tau=\ln c$$

如果波是周期性的，那么以上的边界条件再加上θ和τ对ϕ的周期性就形成一套完整的边界条件。如果波不是周期性的，是一个单独的波，那么在$\phi\to-\infty$或$\phi\to+\infty$的时候，$\theta=0$和$\tau=\ln c$；这样我们也得到了完整的边界条件。

因为ω是W的函数，所以用复变函数理论，我们知道

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2}=0$$

和

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2}=0$$

这样问题就完全定下来了。用新变数的好处是自由面固定下来了。

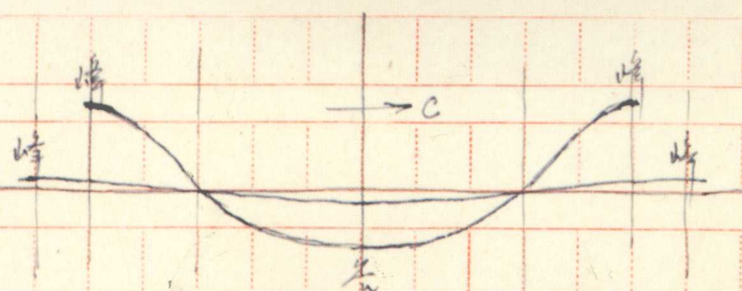


当问题解好了，也就是知道了$\omega=\omega(W)$的关系之后，那么由于$\frac{dW}{dz}=u-iv=e^{-i\omega}$，所以

$$dz = e^{i\omega} dW，或\quad z = \int e^{i\omega} dW$$

这样我们就能找出相应的x、y座标，问题的解也就完整了。直到现在为止，求有限波幅的解差不多都是用的这个方法。

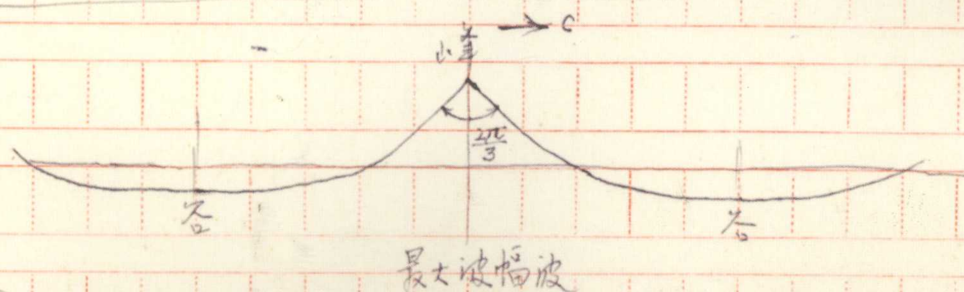
求有限波幅具体解的计算比較复杂，我们不在这里多讲了。我们只指示：在同样波速的条件下，有限波幅波的波长比微小波幅波的波长要短；而且有限波幅波的波峰比波谷要高、波峰处坡度大。波幅越大这种情况也就越显明，最后波峰成为尖形的。



我们也可以求峰顶夹角的大小：我们把座标原点移到峰顶上，在峰顶附近 $W = Cz^{\alpha}$，其中C及α是正实数。那么 $\frac{dW}{dz} = C\alpha z^{\alpha-1}$，$q = \left|\frac{dW}{dz}\right| = C\alpha\left|z^{\alpha-1}\right|$。但是峰顶既然是尖的，在峰顶附近的流线也就是直线，所以 $q \propto y^{\alpha-1}$，$q^2 \propto y^{2(\alpha-1)}$；但是依照边界条件 q^2 应当和 y 成比例，所以 $2(\alpha-1)=1$，$\alpha=\frac{3}{2}$。这就要求 $z = \left(\frac{W}{C}\right)^{2/3}$，$\ln z = \ln\left(\frac{W}{C}\right)^{2/3}$。当我们从峰顶的左面

跨到峰顶的右面（$\psi=0$面），W从$-\pi$走到$+\pi$，所以（峰）顶的角度是 $\ln(-1)^{2/3}$ 的虚数部分，也就是 $=\frac{2\pi}{3}$。这就是最大波幅尖顶的角度了。

我们看得出来，象溢洪道那样的问题，用以上所介绍的变换是没有什么用的，它虽然固定了自由面，使得那儿的边界条件简化了。但是在固定面上，因为θ、τ和ϕ、ψ的关系不能在求得解之前予定，把困难移到相应于固定面的流线上来了。所以我们最好还是老老实实用x，y座标。



最大波幅波

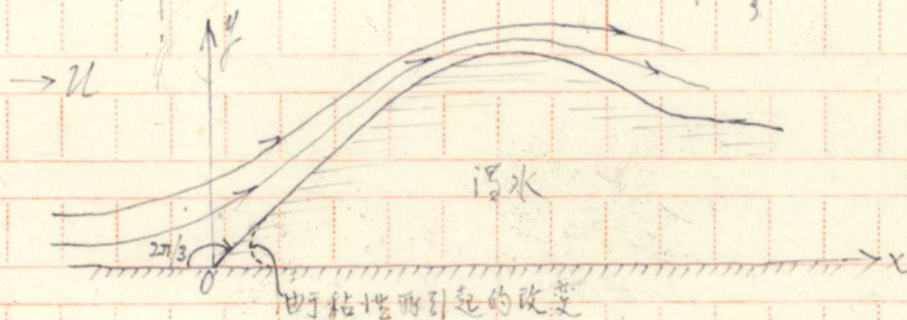
异重流

当夹带着泥沙的河水流入水库的时候，一般流速很小，不足以引起快速的混合，而另一面由于带泥沙的水的比重要比清水大些，因此泥水下沉到河底，而库中清水在上面，清浊分明，形成二层，我们叫这种情况为异重流。异重流问题里，一个重要项目是清水

第 8 页

和浑水的交界面的位置问题。在研究这个问题的时候，我们可以略去交界面附近的边界层，也就是我们不去计较交界面附近水流速度在小范围的连续变化。我们从异重流的大范围变化来看，可以认为水是没有粘性的，并且允许交界面两侧流速的不连续。自然，两侧的压力必需相等，而在定常流动情况下，两侧的流速必需平行于交界面。

现在让我们讨论一个具体的异重流问题：浑水或盐水侵入清水或淡水的问题。我们让浑水前进的速度为 u，底面为 x-方向，并且假设问题为二度维的。为了简化计算，我们选用一个随着浑水前锋走的座标，使得问题变为定常的（如图）。这样



我们把浑水看作是完全静止的，而清水在 0 点有一个驻点，在那儿的压力为 p_0。如果清水的流速是 q，密度是 ρ_1，浑水的密度是 ρ_2，自然 $\rho_2>\rho_1$；那么对清水来讲

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{p}{\rho_1}+gy=\frac{p_0}{\rho_1};$$

浑水是不动的，所以

$$\frac{p}{\rho_2}+gy=\frac{p_0}{\rho_2}\text{，或 }\frac{p}{\rho_1}+g\frac{\rho_2}{\rho_1}y=\frac{p_0}{\rho_1}$$

在交界面上，以上两个公式同时正确，因此在交界面上

$$\frac{1}{2}q^2+g\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)y=0\text{，或 }\boxed{\frac{1}{2}q^2=gy\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)}$$

从以上的公式我们又看到边界条件是速度平方是和y成比例。这个情况和以前所讲的最大波幅波的情况完全相类似，我们可以用同一样的推论得到O点的角度为$2\pi/3$，也就是说浑水侵入的角度为$\pi/3$。自然真实情况就不然，必然有些不同，因为浑水是侵入的介质，它是运动着的，因此在河底形成边界层，在河底的水层被河底面阻力"拉回"，而侵入角有所改变（如图所示）。

我们也可以容易地计算出侵入水浑水层的平衡高度H。因为在那儿的顺流速q是U，所以用上面的公式

$$H=\frac{U^2}{2g\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)}$$

例如：当$U=1$米/秒，$\rho_2/\rho_1=1.002$，$H\approx 25$米。我们也知道当清水流过浑水所形成的"障碍"，最后才能达到平衡高度H，是单向增加的，也在交界面上一定要出现流速q的最大值。即使 从上面的流速和y的关系，我们

看得出来，要能的满足这个出现H最大值的要求，就必须造成分面上前面的淡水的"头"，头的高度大于H。

在这个问题上，我们可以用前面所谈到的变数转换还是有用的。

在分界面上，也就是当 $\phi>0,\ \psi=0$，

$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(e^{3\tau}\right)=g\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)\sin\theta$$

在河底，也就是当 $\phi\le 0,\ \psi=0$

$$\theta=0$$

在远处，也就是当 $\phi\to-\infty$ 或 $\psi\to\infty$

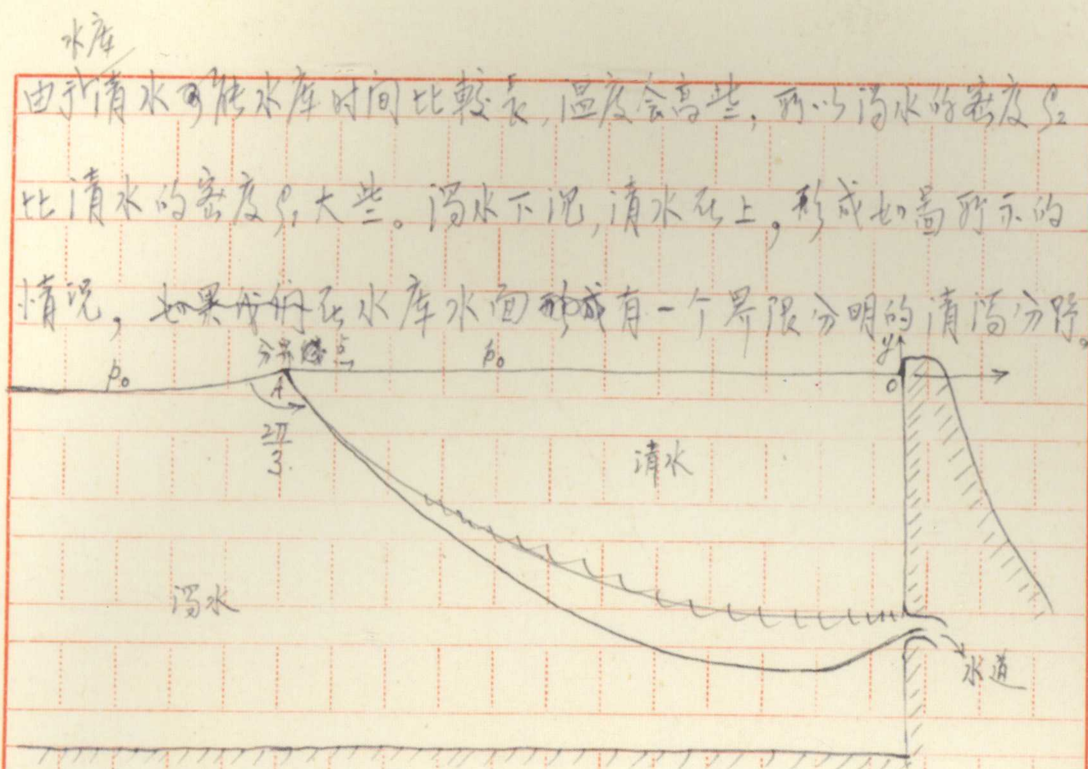
$$\theta=0,\qquad \tau=\ln U$$

再加上 $\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right)\binom{\theta}{\tau}=0$ 的两个拉氏方程我们就能把问题完全定下来。当然，现在这样一个计算也还没有做出来，所以对解的其他性质我们无法予知。例如：侵入水层在"头"的后面会不会有波形的起伏？还是单向地接近平衡层高H？这我们还不知道，实验在这点上看来也没有明确的结果。这是一个有意思的问题。

水库的异重流问题

当河流浑水流入水库的时候，一面由于浑水[illegible]含沙，一

由于清水可能水库时间比较长，温度会高些，所以浑水的密度ρ_2比清水的密度ρ_1大些。浑水下沉，清水在上，形成如图所示的情况，如果我们在水库水面形成有一个界限分明的清浑分界。



我们首先计算在清浑分界点A浑水区的转角：如果我们设p为压力，清水不动，那么在清水里

$$\frac{p}{\rho_1}+gy=\frac{p_0}{\rho_1}, \text{或写作} \quad \frac{p}{\rho_2}+g\frac{\rho_1}{\rho_2}y=\frac{p_0}{\rho_2}$$

而p_0是大气压力。在浑水里的流速是q，那么在定常流条件下，

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{p}{\rho_2}+gy=\frac{p_0}{\rho_2}$$

在交界面上，这两个关系同时正确，那么在那儿

$$\frac{1}{2}q^2=-g\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)y$$

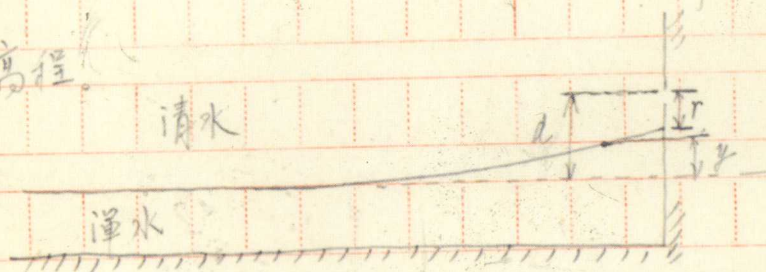
这和表面波（自由面）的关系相似，其实只多了一个$\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$因子。所以我

们可以推断出：在A点的角是2π/3。如果我们略去由于清水水面因为形成驻点而产生的微小升高，那么清水区（在A点）的角度也可以认为是π/3。更准确的数值是比π/3略小。

现在我们再来研究出口的问题。如果浑水不溢出，光是清水溢出，那么在出口附近我们可以认浑水是静止的，只有清水是流动的，而流动速度为v。如果清水的密度是ρ_1，浑水的密度是ρ_2，那么在清水中的伯诺里方程式是

$$\frac{p}{\rho_1}+\frac{v^2}{2}+gy=\text{常数}$$

其中y是基准面（也就是离孔口远处的清浑交界面）至清水中某点的高程。



在浑水里，$\frac{p}{\rho_2}+gy=\text{常数}$，或 $\frac{p}{\rho_1}+gy\frac{\rho_2}{\rho_1}=\text{常数}$

因为在交界面的任何一点，压力必需相等，所以可以将以上两个相减而得到流速（在交界面上）和高程y之间的关系为

$$\frac{v^2}{2}=gy\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}+\text{常数}$$

但是照我们所用的座标来看，当离孔口远的地方，$v=0$，

$y=0$，因此上式里的常数也等于0，因此

$$\frac{v^2}{2}=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}gy$$

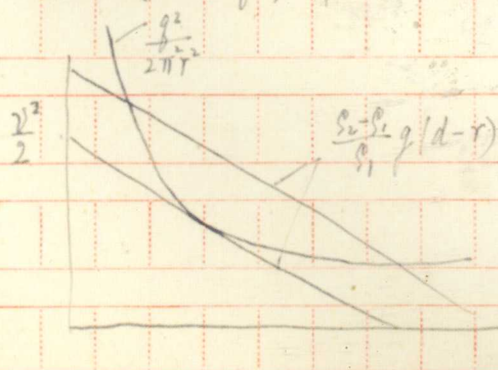
光从这个公式是得不出潭水升高点 r 的值的，我们还得研究出整个流场的情况。现在我们考虑到孔口附近流场必然像一个汇点的流场（当然真也到了孔口，口的有一定大小的，不会是一个点；但在孔口附近我们的假想是大致对的），因此，如果我们设流场为二元的，也就是假设孔口宽度大，高度小，那么令 q 为每一单位宽度的流量，v 的近似值是

$$v=\frac{q}{\pi r}$$

把这个流速值代入上面的交界面关系里，得到

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}g(d-r)=\frac{q^2}{2\pi^2 r^2}\left(=\frac{v^2}{2}\right)$$

如果我们固定 q，那么公式左面的关系代表一条下倾的直线，而（在 $r,\frac{v^2}{2}$ 平面里）公式右面的关系代表一条双曲线型的曲线。我们看得出来，如果 d 小于某一数值，两条



（在临界状况下，r有重根。）

曲线将不会相交，解将不存在。让我们先来求这种临界情况 d^* 的值，然后再研究它的物理意义：上面公式可以换写成

$$r^3-d^*r^2+\frac{q^2}{2\pi^2}\frac{\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\frac{1}{g}=0$$

而如果这个方程式有 r_1 的重根，r_2 的单根，那么

$$(r-r_1)^2(r-r_2)=0,\qquad (r^2-2r_1r+r_1^2)(r-r_2)=0$$

或

$$r^3-(2r_1+r_2)r^2+(r_1^2+2r_1r_2)r-r_1^2r_2=0$$

比较两个公式，我们得出 $(r_1+2r_2)r_1=0$，或 $r_2=-\frac{1}{2}r_1$

因此

$$r_1^3=\frac{q^2}{\pi^2}\frac{\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\frac{1}{g}$$

而

$$\frac{3}{2}r_1=d^*$$

也就是说

$$\left(\frac{2}{3}d^*\right)^3=\frac{q^2}{\pi^2}\frac{\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\frac{1}{g}$$

这也等于说

$$\frac{gd^{*3}}{q^2}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}=\frac{27}{8\pi^2}=0.342$$

我们说 d 如果小于 d^*，解就找不出来，那也就是说我们所设想的解找不出来，而并不是说水流流不动了。我们设想浑水不动，光是清水动；如果说这种流型不可能，那就是浑水

也要流出孔口，浑水不能不动。因此d^*的物理意义应当是：如果$d>d^*$，浑水不流出孔口；如果$d<d^*$，浑水流出孔口。从水头和孔口的尺寸，我们是能计算出流量q的，有了q我们就能计算出d^*。如果我们要溢出浑水，从而防止水库的淤积，那么$d<d^*$，孔开得太高了是不行的。但是孔开得太低了，当不溢洪的时候又容易为泥沙所盖没，也不好；这使得d^*的意义更大了。

实验结果大体上符合我们的公式，只不过常数有些不同，

$$\frac{g d^{*3}}{q^2}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}=0.344$$

我们考虑到上面理论计算的粗略（使用了一个近似的速度分佈），理论和实验的对比是可以满意的。

第八讲

泥沙问题

一般来说泥或沙都是由密度比水大的固体粒子所组成，如果水无论是在宏观中或微观中都是完全静止的，在重力的作用下，这些比水重的粒子一定终于会下降。其所以在实际上能悬浮在水里是因为 1) 水的分子有热运动，可以带动微细的粒子；2) 水在运动的时候会因水的粘性而产生速度的横向梯度，粒子在有横向梯度的流场作用下，能产生向上的升力；3) 水在大多数情况下是已经形成湍流，其中的各式旋涡及不定常速度能带起沙粒不使它下降。但是无论是那一种原故，它们都是因为水有分子运动或粘性才引起的：粘性产生湍流，没有粘性不会有湍流。因此，当我们研究泥沙问题的时候，我们不能完全脱离对水的粘性的考虑。

渠道中泥沙的输移

我们如果研究在河道或渠道中泥沙输移的情况，我们一般是说水流已经是湍流，所以这里的问题是沙粒在湍流中运动的规律。我们一般看到河底因泥沙的沉淀已经形成波涟，但这波涟不是固定不移的，而是以很小的速度向水流方向移动。在沙涟之上，有一层含沙量比较多的浓泥水，其中含一部分粒径比较大的粒子。这里是湍流度最高的所在，水搅乱的最利害。再往上，水流的湍流度减小了，大一些的沙粒不能悬在水里了，泥沙的浓度也越小。到了河水面，湍流的悬浮能力等于

零，所以从湍流的角度来说，泥沙的稳定含量是零。自然，实际上还会有些极细的粒子作为胶体状态而悬浮在水中，但这是可以略去不计的。

我们由上面所说的一幅图画看来，河道中泥沙的问题有下列的几个部分：1)河底沙漣的形成，它的波长，波形、及波高；2)由于这种高低不平的河底所引起的湍流；3)泥沙及湍流水流的相互影响。三个部分又是相互联系的，湍流影响沙漣的形成；湍流与平均流速的梯度有关，而梯度影响沙漣的波长和波高。我们现在能够计算得有把握的只有在含沙量不太大的水流含沙分布，而这也是要先给定水流在河底附近的速度梯度，和河底附近的含沙量。因此我们可以说一个完整的河道泥沙輸移理论尚未建立。

在这么一种情况下，工程师们就只有用实验方法来解决问题。但因实验不可能包括一切的参数变化，各个实验者只选择他解决问题所必需的一些参数，所以各个不同实验者所得到的经验方式也就不同了。我们收集一下就有二十个经验公式之多。我们用它们的时候，就一定要了解每一个公式背后的实验情况，所用参数的幅度等，不然就会用的不恰当，因而得不到可靠的结果。

悬沙浓度的分布

我们现在来计算在平衡状况下悬沙浓度的分布：我们将利用湍流中的大涡旋来作为搅动泥沙的原因。自然，如果大涡旋是各向同性的，那么再强的涡旋也不会产生什么使沙粒上升的力量。所以不光是大涡旋而是大涡旋的各向异性的程度是使沙粒能抵抗重力而悬浮在水中。衡量大涡旋各向异性

的尺度是湍流中的传输系数，ε。而 $\rho\varepsilon$ 是湍流粘性系数。也就是说如果湍流中的剪力是 τ，V 为 x-向的速度，

$$\tau=\rho\varepsilon\frac{dV}{dy}$$

$\frac{dV}{dy}$ 就是横向速度的梯度了。在河道中 $\tau=\tau_0(1-\eta)$ 而 $(1-\eta)$ 是从水面量到 y 点的距离被水深 h 除的商。τ_0 自然是底面上的剪应力了。但是我们在粗糙度为 k_s 的河床上，半理论半经验的对数速度公式为

$$\frac{V}{u_*}=\frac{1}{K}\ln\frac{y}{k_s}+8.5$$

其中 K 是卡门常数，而 y 是从 $y=k_s$ 起到 $y=h+k_s$，而 $\rho u_*^2=\tau_0$（u_* 为为摩阻速度。），因此

我们如果认为泥沙的浓度不太大，它不影响水中的湍流情况，那么

$$\tau=\rho u_*^2(1-\eta)=\rho\varepsilon u_*\frac{1}{K}\frac{1}{y},$$

所以

$$\varepsilon=u_*Ky(1-\eta)$$

如果我们利用

$$h(1-\eta)=h+k_s-y,\qquad y=k_s+h\eta=k_s\left(1+\frac{\eta}{r}\right)$$

而

$$\boxed{r=k_s/h}$$

故

$$\varepsilon=u_*Kk_s\left(1+\frac{\eta}{r}\right)(1-\eta)$$

现在我们来研究泥沙（因搅动而）上升及因重力而下降的平衡。如果 Δs 为以体积计的含沙量（即单位体积水中沙的体积），那么向上升的沙流，也就是单位面积单位时间的沙的体积流量为

$$-\varepsilon\frac{d\Delta s}{dy}$$

但是如果沙粒在重力作用下的沉速度为W，那么下沉流为$W\cdot\Delta S$. 而总的泥沙的净流动必需等于零，因为我们是在计算平衡状况，也就是泥沙浓度ΔS不因河道断面的不同而有所不同。因此

$$-\varepsilon\frac{d\Delta s}{dy}-W\Delta s=0,\quad \text{也就是}\quad -\varepsilon\frac{d\Delta s}{dy}=W\Delta s$$

我们利用以前的传输系数ε，也就是我们认为泥沙的浓度不太大，不会影响偏流的情况，那么

$$\frac{u_* K r}{W}\left(1+\frac{\eta}{r}\right)(1-\eta)\frac{d\Delta s}{\Delta s}=-d\eta$$

也就是如果我们叫 $W/u_*K=\beta$，那么

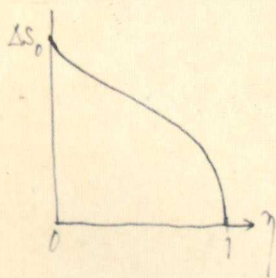
$$d(\ln\Delta s)=\frac{\beta}{r}\frac{-d\eta}{\left(1+\frac{\eta}{r}\right)(1-\eta)}=\beta\frac{-d\eta}{(r+\eta)(1-\eta)}=-\beta\left[\frac{1}{1-\eta}+\frac{1}{r+\eta}\right]\frac{d\eta}{1+r}$$

因此如果ΔS_0是底下的泥沙以体积计算的浓度，那么

$$\ln\frac{\Delta S}{\Delta S_0}=\ln\left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\frac{\beta}{1+r}}$$

也就是

$$\boxed{\Delta S=\Delta S_0\left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\frac{\beta}{1+r}}}\qquad 0<\eta<1.$$



$r=k_s/h$ 是总粗糙度和水深的比，它一般是很小的，因此我们可以把上面的公式写作为

$$\boxed{\Delta S=\Delta S_0\left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta}}$$

~~在这个公式里，W是可以用实际方法来测定的；只要总粗糙度k_s和摩阻速度知道了之后，我们就能计算出泥沙浓度的分布。计算结果和实验测定相比是符合的。所以这个理论是可以用的。~~

当然，天然情况下，沙粒有大有小，因此在重力下的下沉速度也不会是

是一个常数。在这么一个情况下，我们如果认为泥粒之间的影响不大，细沙以细沙而保持上下的平衡；粗沙以粗沙而保持平衡。那么如果 $w(W)dW$ 是泥沙中粒度使沉度在 W 及 $W+dW$ 之间的几率，

$$\int_0^\infty w(W)\,dW = 1$$

那么

$$\Delta S_0 = S_0\, w(W)\,dW$$

而 S_0 为总泥沙以体积计算的浓度。所以如果 S 为任何一点 η 的总沙浓度，那么

$$S(\eta) = S_0 \int_0^\infty w(W)\left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\frac{W}{\kappa u^*}} dW$$

如果我们要计算河水的输沙量，也就是每公方水流所输泥沙的体积，我们只要把河水分层，每层计算的流量。也就是如果 ρ_s 为沙的密度，那么每单位水流体积中的沙重 ρ^* 为（即挟泥能力）为

$$\rho^* = \rho_s \frac{\int_0^1 S(\eta)\,V\,d\eta}{\int_0^1 V\,d\eta} = \rho_s \frac{\int_0^1 S(\eta)\left[\frac{1}{\kappa}\ln\left(1+\frac{\eta}{r}\right)+8.5\right]d\eta}{\int_0^1\left[\frac{1}{\kappa}\ln\left(1+\frac{\eta}{r}\right)+8.5\right]d\eta}$$

现在我们必需说明：1) 我们的计算实际上是假设泥水的运动与清水一样，也就是说泥沙颗粒基本上能和水一起流动。这就要求泥粒和水之间的速度差必需远远小于水流的脉动速度，而脉动速度是可以用 Ku^* 来衡量的，所以我们的理论只能在 $W \ll Ku^*$ 的时候才准确。实验结果也证明这一点。 2) 因此较粗的泥不能用这个理论；但也还没有其他很明确肯定的理论。所以我们可以说对粗沙来讲，我们究还没有可靠的计算方法。 3) 我们的计算是假设先知道了 u_* 及 k_s 的基础上的，但是 u_* 及 k_s 和河床沙波长及波高有关，这个关系现在

还不能明确下来，主要的是实验结果不够多。但就是水流情况和沙陡波长及波长之间的关系，我们现在也还只有一些初步结果，还不能够建议有可靠的计算方法。因此，整个泥沙传输问题的理论是片断的，还没有一套完整的理论。

（可参看茅树宗："二元渠道中泥沙的输移和渠底的改变"，力学学报，2卷2期）

浅水、情况下的沙陡波长

当水很浅的时候，水底沙陡的影响直接作用在水面，在水面上也形成一个波；自然，因为沙陡基本上是不动的（前进的速度非常小，比起水流速度来可以略去不计），所以水面波也是驻波。我们设水深为 h，在水底有沙陡，它的波长为 λ，也就是底面是

$$y=-h+A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$$

未受有干扰的水面是 $y=0$，水流速度为 U，所以如果把水流作为基本是均匀的，而且可以用无旋、理想流体来看待的话，那么速度势 ϕ 为

$$\phi = Ux + C\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sinh\frac{2\pi y}{\lambda} + D\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cosh\frac{2\pi y}{\lambda}$$

因此

$$v_x = U+\frac{2\pi}{\lambda}\left[-C\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sinh\frac{2\pi y}{\lambda} - D\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cosh\frac{2\pi y}{\lambda}\right]$$

$$v_y = \frac{2\pi}{\lambda}\left[C\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cosh\frac{2\pi y}{\lambda} + D\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sinh\frac{2\pi y}{\lambda}\right]$$

当 $y=-h$ 的时间

$$v_y = \frac{2\pi}{\lambda}\left[C\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cosh\frac{2\pi h}{\lambda} - D\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sinh\frac{2\pi h}{\lambda}\right]$$

为了使流速能顺着沙陡的表面

$$U\cdot A\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\left[C\cosh\frac{2\pi h}{\lambda} - D\sinh\frac{2\pi h}{\lambda}\right]$$

也就是

$$UA = C\cosh\frac{2\pi h}{\lambda} - D\sinh\frac{2\pi h}{\lambda}$$

而 在自由面上，$y=0$， $v_x = U + \frac{2\pi}{\lambda}\left[D\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right]$

$$v_y = \frac{2\pi}{\lambda}\left[C\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right]$$

但是依照Bernoulli定理，如果 p_0 为大气压力，那么如果B为水面波的波幅，略去二次项不计，

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - \rho U\frac{2\pi}{\lambda}D\sin\frac{2\pi x}{\lambda} + g\rho B\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$$

也就是说

$$U\frac{2\pi}{\lambda}D = gB \quad 即 \quad D = gB\frac{\lambda}{2\pi U}$$

在河底，在沙浪表面，$y=-h$，

$$v_x = U + \frac{2\pi}{\lambda}\left[-C\sinh\frac{2\pi h}{\lambda} + D\cosh\frac{2\pi h}{\lambda}\right]\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$$

但是如何说沙浪形状已经稳定下来，沙浪不再改变，那么只有沙浪表面的流速都是常数，在波峰上的速度等于在波谷上的速度。这就是说

$$+C\sinh\frac{2\pi h}{\lambda} - D\cosh\frac{2\pi h}{\lambda} = 0$$

再说为了使流速能顺着自由面上的波，

$$UB\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}C\cos\frac{2\pi x}{\lambda},$$

也就是

$$UB = C$$

用上面的C及D与B之间的关系，我们就得到

$$\frac{D}{C} = \frac{g\lambda}{2\pi U^2} = \tanh\frac{2\pi h}{\lambda}.$$

也就是说

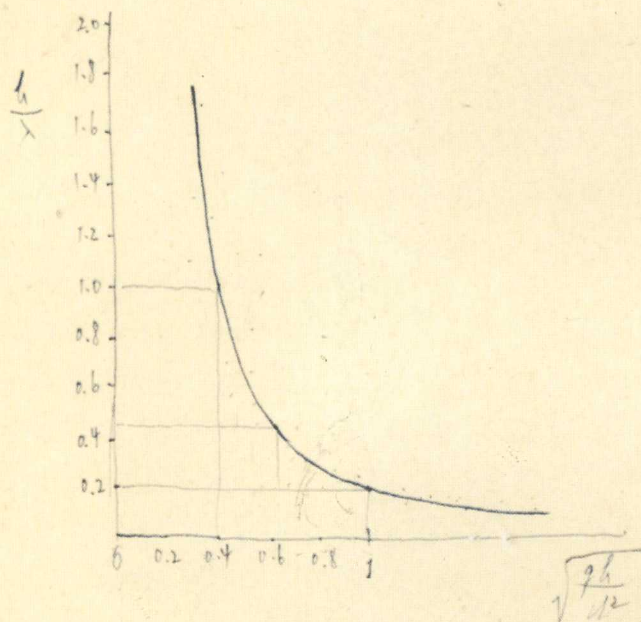
$$\frac{2\pi h}{\lambda}\tanh\frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{gh}{U^2}$$

在这种情况下，

$$\frac{A}{B}=\cosh\frac{2\pi h}{\lambda}\left[1-\frac{gh}{U^2}\frac{\lambda}{2\pi h}\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}\right]=\cosh\frac{2\pi h}{\lambda}\left[1-\tanh^2\frac{2\pi h}{\lambda}\right]=\frac{1}{\cosh\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

也就是说 $B>A$，表面波幅比沙涟波幅大。这些结果都有实验的证明，是比较准的，可用的公式。

当然，我们的分析是一个线型的理论，因此也就无法决定沙波高的绝对值。所以我们的计算只解决了问题的一半！



注释与说明

这份讲义手稿是1958年下半年钱学森老师在清华大学给第一届力学研究班学员讲授《水动力学》课程用的备课笔记。1956年制订我国12年科学规划时，钱学森、钱伟长、郭永怀、张维等老师深感我国力学人才的匮乏，难以适应大规模经济和科学技术发展的需要。为此，在科学规划中列入了紧急开办力学研究班的措施：决定自1957年春起，抽调各高校的优秀应届毕业生、教师和研究所的技术人员共120余人参加学习，采用研究生班的规模化培养方式，学制二年。二年中，钱学森、钱伟长、郭永怀、林同骥、李敏华、郑哲敏、王仁、杜庆华等都亲自执教或指导论文，一时名师荟萃，群英毕至，盛况空前。他们为学员带来当时国际力学学科领域的最新成就与理念，使受业者眼界大开，学业猛进，受益终身，犹如在朦胧的迷途中，敞开了一片新的天地。这个班的学员们毕业后洒向全国，经过几十年的锤炼，造就成为一代力学学科的后续播种者；清华大学力学研究班先后办了三期，它在我国力学学科发展史上的重大作用，得到业界公认，其功绩理应首归钱学森老师等的一代宗师。

本份手稿的写就，距今已有半个世纪。随着科技发展的突飞猛进，它不仅没有失去光彩，反而更加显示出它的醇厚芬芳，遒劲有力。首先，钱老师选材简赅精切，遴选的内容具有基础性、经典性，至今仍使人感到熠熠生辉；在阐述和推演过程中充分体现了哥廷根学派的重要理念：强调科学与技术、数学学科与应用学科紧密结合来解决工程关键问题；要求细致观察和了解物理现象，提炼出反映本质的物理模型，然后建立方程加以模化，用最有效的数学手段求出结果，从而掌握事物的基本规律。这也正是由钱老师率先提出、并为科技界广泛接受的“力学是技术科学”精神的具体演示。本手稿的另一重要特色是清晰耐读，详略得体，推演细腻，覆盖全面；这样细致而又充实的备课笔记所体现的负责、求实、善诱、谆导的精神，足为后人示范。

作为本手稿注释者的我们两人，当年是第一届力学研究班的学员兼辅导教师。遗憾的是钱老师授课时，我们两人因有他务而未能亲临听讲。这些年来凭借阅读杨文熊学长的听课笔记而受益。这次有幸得以详尽拜读手稿，收获和感触良多。我们认为给本手稿作导读性的注释是多余的。因此本注释的内容仅为手稿中文字上的笔误，以及在个别段落处为便于读者理解的少量提示。此外，还依藉杨文熊学长当年认真而又详尽的听课笔记，将钱老师在课堂上讲课时所提供的某些重要补充作为注释。这些注释都未经钱老师本人审阅，不当和错误全系我们两人之责。

刘应中、何友声

第一讲　表面波

（1）第 4 页，倒 3 行：“让为”是“认为”之笔误。

（2）第 5 页，第 3 行中的常数 ζ 与 14 行的自由面形状 ζ，不要混淆。

（3）第 6 页，第 8 行：“所以质点轨迹”，应该是“所以流线方程是”，因为用的是流线方程。一般说来，对不定常问题，流线不和轨迹重合。但对当前的问题，流线方程不随时间而变，所以实际上，轨迹是与流线重合的。

（4）第 6 页，倒 1 行：“流线是可以在 z - 向移动的”后加注：“因为移动给人的印象是随时间变动位置，而这里流线不随时间变化，故为流线向 z - 向延伸的意思。”

（5）第 8 页，倒 5 行：“园”为“圆”之笔误。

（6）第 9 页，1 行：“园”为“圆”之笔误。

第二讲　表面波（续）

（7）第 13 页第 4 行末尾“很容易”之后加一注：这里是选定在以波速 c 移动的动坐标系中讨论的，这时运动变成定常的了。

（8）第 13 页，第 11 行“……增加！”后加注：“波长与水深之比很大者称为长波，反之称为短波。例如浅水时，$h\to 0$，对应于长波；当水深很大或有限水深时，对应于短波。

（9）第 14 页中间红字部分：“我们看到如果要表面张力与引力占同等重要的地位，那么”之后可以加注：

$$\alpha \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2} \sim \alpha \frac{\zeta}{\lambda^2}\text{，则有“}\frac{\alpha}{\lambda^2} \sim \rho_2 g\text{”，从而 }\lambda \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_2 g}}\text{。}$$

（10）在 14 页中间：“我们知道

$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + u\frac{\partial\zeta}{\partial x}$”后可以加注：因为下层水有一个平行于 x 轴的速度 u，于是，对二维问题，自由面上一点 $x, z=\zeta(x,t)$ 的速度为

$$v_z = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + u\frac{\partial\zeta}{\partial x}。$$

因为此前给出的关系(见第 3 页)中没有流速。

(11) 14 页倒 5 行:“$a\sigma = -C_1 k$”处加注:这是因为上层空气本来是不动的,所以

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t},从而有\ a\sigma = -C_1 k。$$

(12) 15 页第 9 行:“的最小值。也就是”处可加注:将上式看作波长的函数,即

$$F(\lambda) = \frac{g\lambda}{2\pi}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}\right) + \frac{2\pi\alpha}{\lambda(\rho_2+\rho_1)}$$

按极值条件 $F'(\lambda)=0$,可得这个关系。

第三讲　波阻

(13) 17 页第 3 行:“令波的周期为 λ”处加注:这里指波长,波浪在空间重复的周期。

(14) 17 页倒 12 行:“坚”为“竖”之笔误。

(15) 17 倒 9 行:“ζ 的波高……”,注:这里指波面形状,而不是波高。

(16) 20 页第 8 行:

$$g\delta(x) = c\frac{\partial(x,0)}{\partial x}系\ g\delta(x) = c\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial x}之笔误。$$

(17) 21 页中多处出现的

$$f(z) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - \nu\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$$

和 20 页倒 5 行定义的

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \nu w = f(z) = \varphi' + \mathrm{i}\psi'$$

不是一个函数,请勿混淆。

(18) 21 页第 9 行:在“可根据 Schwartz 对称原理”这里加一注:参看斯米尔诺夫《高等数学》(叶彦谦译),商务印书馆,1953 年,第三卷、第二分册,第 94 页“对称原理”。

(19) 21 页第 15 行:“二级极点”为“二阶极点”之笔误。

(20) 24 页第 2 行:“依照 Чаплыгин 公式”处可加注:参看柯钦、基柏尔、罗斯《理论流体力学》,卷一,第六章,第五节。

(21) 25 页第 2 行末尾可加注:左边是个复数积分,根据积分线路的变换知道,该积分应该从极点 ih 的右边绕过。等式右端第一项就是绕过极点 ih 的半个留数,这样右端第二个积分中

虽然在形式上含有极点 ih,但应该是取积分主值的。于是第 6 行引入的两个特殊函数就是实数,而且不含奇点了(第二个特殊函数只含有可去奇点)。第二行右端第一和第二个积分的积分限所以取为 $3ih$,是为了使第 4 行最后一个积分的上下限的绝对值成为相同的。

(22) 在 25 页末尾可注:钱老师在课堂上曾补充指出,这里解是可以叠加的,但是得到的流体动力却不能叠加,因 Чаплыгин 公式中含有 $\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2$,是非线性的。例如,两个涡的速度势可以叠加,但是作用在两个涡上的力,却要考虑两个涡的相互影响。

第四讲　水面滑行的平板

(23) 在 26 页第一行标题之后加注:钱老师在课堂上补充指出:板在水面上靠滑行得到升力,与一般船舶靠浮力支撑者不同。为此先考虑作用在自由面上一点的力 F 所产生的解。

(24) 28 页第 9 行的末尾可加一注:积分可以分解成以下右端的形式:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\nu x\xi}\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1} = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{(1-\mathrm{e}^{\nu x\xi})\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1}$$

是因为在 ν 小时,可以证明,后面的积分的首项是 $O(\nu)$ 的量阶,从而在后面(倒 7、8 行)的展开中未写出的首项是 $O(\nu^2)$ 的量阶。

(25) 28 页倒 4 行,“平板上的压力分布是 $p-p_0=f(\xi)$,$0<\xi<b$”后参照笔记可加注:钱老师在课堂上补充指出:这里 b 是板长。平板在水面上滑行,平板处的水面斜率 α 是给定的,因为自由面形状必定符合平板,而压力分布是待求的,因此,求压力分布 $f(\xi)$,必定归结为求解积分方程的问题了。

(26) 32 页第 5 行:“……引力……”为“……引入……”之笔误。

(27) 32 页第 10 行:“可以……”为“可是……”之笔误。

第五讲　浅水中的长波

(28) 35 页倒 7 行末可按笔记加注:钱先生在课堂上补充指出:在无旋条件中以 $v_z=0$ 代入可得 $\frac{\partial v_y}{\partial z}=\frac{\partial v_x}{\partial z}=0$,而无旋条件剩下:$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0$。

(29) 35 页,倒 5 行:“三面……”为“上面……”之笔误。

(30) 36 页第 4 行中密度两字可加上引号“密度”。

(31) 37 页第 1 行和第 2 行："深水"，在这里是指"浅水"。

(32) 37 页第 4 行："$v^2 > g(h+c)$"为"$v^2 > g(h+\zeta)$"之笔误。

(33) 37 页第 15 行："水槽起始的一头有一个在宽度变化上形似 Laval 喷口的槽，从而得到超临界速度流。在此以后槽宽就不改了"之后加注：水力学上实现超临界速度流的办法，一般是在深度方向改变槽底深度，例如将水流经过一个水坝后可以得到超临界流。

(34) 37 页倒 4 行，"浅因"为"浅固"之笔误。

(35) 38 页第 7 行："$-\bar{g}$"为"-1"之笔误。

(36) 42 页，倒 2 行和倒 4 行中，一些打叉的项只是一些检查的记号，并不是消去的意思。

(37) 43 页，倒 3 行和倒 6 行："ρ_1/ρ_0"为"$\bar{\rho}_1/\bar{\rho}_0$"之笔误。

第六讲　河流水动力学

(38) 44 页第 5 行中"$\mathrm{d}s$"及第 8 行中"$-\frac{\partial Q}{\partial s}\mathrm{d}x\Delta t$"，以后都将"$\mathrm{d}s$"改成"$\mathrm{d}x$"及"$\partial s$"改成"$\partial x$"了。

(39) 44 页第 6 行，"断面"，指的是"断面面积"。

(40) 46 页第 7 行，钱老师在课堂上对"$q\rho V$"项作如下解释：q 本身没有速度，$q\rho V\mathrm{d}x$ 为动量之变化。

(41) 46 页，倒 10 行："犹"为"尤"之笔误。

(42) 47 页，倒 6 行，钱老师在讲课时补充了下图：

$$X = B + 2y, \omega = By, R = \frac{\omega}{X} = \frac{y}{1+2y/B}$$

(43) 48 页第 3 行之末可加注：钱老师在讲课时补充指出：故一般 $g - D^2/y^3 \neq 0$，而且

$$g - D^2/y^3 > 0。$$

(44) 49 页第 3 行在"$\cdots C/\varepsilon$ 的形式"后面加注：由于 49 页原第一行的式子被划掉，导致前后语句不顺，可改动如下："因为 ，$B>0, i>0$，所以我们可设在 $y = y^*$ 附近，48 页第 5 行的等式右边的积分核（讲义中成为积分子）具有 C/ε 的形式，C 为一个正的常数。

(45) 49 页第 3 ~ 4 行中关于 ε 为正或负趋近于 y^*，x 都趋于 $-\infty$，与所示图不符。

(46) 50 页第 10 行，"以 u 速度向 $x-$ 向进行的波"后可加注：u 是常数。

(47) 51 页末尾可加一注：被积函数 $I(\eta)$ 有两个零点：$\eta = 0$ 和 $\eta = \sqrt[3]{D^2/Gg}$，在 $\eta = 0$ 附近被积函数 $I \sim \gamma \frac{D^2}{D|D|}\eta^{1/3}$，$D$ 和 I 都是负的。在 $\eta = 0$ 和 $\eta = \sqrt[3]{D^2/g}$ 之间，水流是超临界的；大于

$\eta=\sqrt[3]{D^2/g}$,水流是亚临界的。被积函数 I 有两个奇点 y_0 和 y_1,设 $y_1>y_0$。它们分别由上面(倒1、2 行)两个公式决定。在 y_0 和 y_1 点,有$\frac{dy}{d\zeta}=0$,即水深不变。

第七讲　空　化

(48) 54 页,倒 4 行:“犹”为“尤”之笔误。

(49) 55 页倒 2 行,“空蚀”为“空化”之笔误。

(50) 56 页,倒 10 行:“的移”为“而移”之笔误。

(51) 57 页第 3 行:“用”为“同”之笔误。

(52) 59 页第 3 行:“园”为“圆”之笔误。

(53) 59 页第 7 行:“因为 $\bar{q}=\frac{1}{\lambda},\lambda\geqslant 1$ ”,这里 $\bar{q}$ 应该是 $\bar{q}^*$,代表奇点在 $\bar{q}$ - 平面的位置。对照 58 页 $\bar{q}$ - 平面的图可知。

(54) 60 页倒 4 行末尾,钱老师在课堂上有如下补充:对于给定的板的宽度 b,来流的攻角 α,速度和压力,以及蒸汽压,可以由此式计算常数 C,即为偶强。

(55) 60 页最后一行,钱老师在课堂上有如下补充:

“$P=\frac{1}{2}\rho v_v^2\int_{-1}^{1}(1-q\bar{q})\,dz=\frac{1}{2}\rho v_v^2 b\left[1-\frac{1}{b}\int_{-1}^{1}t^2 dz\right]$,将第 4 行 dz 的表达式代入,得到”

(56) 64 页,倒 2 行:“犹”为“尤”之笔误。

(57) 在 65 页前加注:“钱老师在手稿中还提供了另一种推演正迎水的平板的解的方法如下:”在 67 页倒 2 行之末加注:“这一结果与 62 页 7 行的结果完全相同”。

(58) 65 页,倒 5 行:“园”为“圆”之笔误。

第八讲　非线性自由面及交界面问题

(59) 69 页第 9 行:“任”为“认”之笔误。

(60) 71 页第 11 行:“可以”为“可是”之笔误。

(61) 72 页第 3 行:“$\omega=\theta+\mathrm{i}\ln q$”之后加注:“$\omega=\theta+\mathrm{i}\tau$ 所以 $\tau=\ln q$,或 $e^{\tau}=q$”。

(62) 78 页第 2 行:“图”为“示”之笔误。

(63) 78 页末行末尾漏掉“面”字。

（64）81 页第 5 行:“口的”为“口是”之笔误。

（65）81 页第 9 行:“假设孔口宽度大,高度 r 小,q 为每一单位宽度的流量,流速 v 的近似值是 $v=\frac{q}{\pi r}$”后面加注:“此式有待进一步查实”

（66）由于时间安排关系,第八讲内容钱老师在力学研究班讲课时将它跃过了。

第九讲　泥沙问题

（67）84 页第八讲为讲课时的第八讲,实际应为第九讲。

（68）85 页,倒 9 行:“方式”为“公式”之笔误。

（69）86 页,第 4 行:“$\tau=\tau_0(1-\eta)$”后加注:“钱老师在课堂上补充如下:设一小块重 $\rho gh(1-\eta)\cdot1\cdot1\cdot i=\tau$,可见 $\tau\propto(1-\eta)$,故可写成此式”。

（70）86 页最后一行末尾可加注:在深度方向的浓度梯度是 $\frac{\mathrm{d}\Delta S}{\mathrm{d}y}$,经过湍流扩散,泥沙的体积流量是 $\varepsilon\frac{\mathrm{d}\Delta S}{\mathrm{d}y}$,扩散的方向是从高浓度指向低浓度,故前面应该有一符号。这里 是湍流的质量扩散系数,一般取为湍流的动量扩散系数,也就是湍流的粘性系数,或称湍流的传输系数。

（71）87 页第 3 行:“用”是“同”的笔误。

（72）89 页倒 1 行末尾加注:“钱老师在课堂上补充:在河底 $y=-h$ 上,流速顺着沙涟的表面,有:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}=\frac{v_y}{v_x}\approx\frac{v_y}{u}\text{。”}$$

（73）90 页第 3 行末尾加注:钱老师在课堂上纠正了一个符号,即

$$v_x=U+\frac{2\pi}{\lambda}\left[D\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right]\text{改为 }v_x=U-\frac{2\pi}{\lambda}\left[D\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right]$$

下同。

（74）90 页 5 行末尾可加注:水面驻波波形为

$$y=B\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔ
ｉｏｎ］
书名＝水动力学讲义手稿
作者＝钱学森著
页数＝９８
ＳＳ号＝１１９７８２３０
出版日期＝２００７．１